Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Klassische Elekrodynamik —

5. April 2017
Sommersemester

Übungsserie 1

Aufgabe 1: Vektoridentitäten (10 Punkte)
Gegeben seien beliebige Vektorfelder $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ sowie ein Skalarfeld $\lambda(\mathbf{r})$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten mit Hilfe des total antisymmetrischen Pseudotensors ϵ_{ijk}:

a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

b) $\mathrm{rot}\,(\lambda\,\mathbf{A}) = (\mathrm{grad}\,\lambda) \times \mathbf{A} + \lambda\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$

c) $\mathrm{rot}\,(\lambda\,\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\lambda\,\mathbf{A} \cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{B} + (\lambda\,\mathbf{B} \cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{A}(\mathrm{div}\,\mathbf{B}) - \lambda\,\mathbf{B}(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) + \mathrm{grad}\,\lambda \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

d) $\mathrm{grad}\,(\lambda\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\lambda\,\mathbf{A} \cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{B} + (\lambda\,\mathbf{B} \cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{A} \times (\mathrm{rot}\mathbf{B}) + \lambda\,\mathbf{B} \times (\mathrm{rot}\mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathrm{grad}\lambda$

Spezialisieren Sie Aufgabenteil (b) für den Fall $\lambda(\mathbf{r}) = 1$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathrm{grad}\,\phi(\mathbf{r})$. Welche Bedeutung hat das Resultat für die Elektrostatik?

Aufgabe 2: Gradient in Kugelkoordinaten (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Gradient in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) in der Form

$$\mathrm{grad}\,\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta}\,\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$

geschrieben werden kann, wobei $\lambda(r, \vartheta, \varphi)$ eine beliebige skalare Funktion ist.

Hinweis: Die Transformation von Kugelkoordinaten zu kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Aufgabe 3: Gaußscher Satz (4 Punkte)
Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = a\,x\,\mathbf{e}_x + b\,y\,\mathbf{e}_y + c\,z\,\mathbf{e}_z$ und die Kugel $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Hierbei sind a, b, c und R Konstanten.

Aufgabe 4: Stokesscher Satz (4 Punkte)
Verifizieren Sie den Stokesschen Satz für das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4x}{3} - 2y\right)\mathbf{e}_x + (3y - x)\,\mathbf{e}_y$ und die Ellipse $F = \{(x, y, z) : \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq R^2,\ z = 0\}$.