Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Klassische Elekrodynamik —

Abgabe 12. Juni 2017
Sommersemester

Übungsserie 10 - Probeklausur

Wichtig: Es sind nur die Aufgaben 1-5 verpflichtend zu bearbeiten. Die Aufgabe 6 dient der Vollständigkeit der Probeklausur und kann freiwillig bearbeitet werden.

Aufgabe 1: Verständnisfragen (2+1+2+2 Punkte)

a) Nennen Sie die Maxwellgleichungen in differentieller Form und leiten Sie aus diesen die integrale Darstellung ab.

b) Ist das Magnetfeld $\mathbf{B} = g\,\mathbf{r}/r^3$ eine Lösung der Maxwellgleichungen. Begründen Sie!

c) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwellgleichungen ab.

d) Geben Sie eine Ladungsverteilung an, die

- sowohl ein Monopolmoment als auch ein Dipolmoment hat.
- ein Quadrupolmoment aber kein Monopolmoment hat.

Lösung:

a) Die Maxwell Gleichungen in differentieller Form lauten:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Mittels Satz von Gauß erhalten wir

$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$\int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Der Satz von Stokes liefert

$$\int_A \mathrm{d}\mathbf{f}\, \nabla \times \mathbf{E} = -\int_A \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial A} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = -\int_A \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\int_A \mathrm{d}\mathbf{f}\, \nabla \times \mathbf{B} = \int_A \mathrm{d}\mathbf{f} \left(\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial A} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \int_A \mathrm{d}\mathbf{f} \left(\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

b) Nein, das gegebene Magnetfeld ist keine Lösung der Maxwellgleichungen, da es einem Magnetischen Monopol entspricht. Es ist also

$$\nabla \mathbf{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{r} \neq 0,$$

aber

$$\int_{K_R} d^3\mathbf{r}\, \nabla \cdot \mathbf{B} \int_{\partial K_R} d\mathbf{a}\, \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi$$

und somit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r}).$$

c) Mit Hilfe von $\nabla\left(\nabla \times \cdot\right) = 0$ erhalten wir

$$0 = \nabla\left(\nabla \times \mathbf{B}\right) = \nabla\left(\mu_0\, \mathbf{j} + \epsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial\, \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\, \rho}{\partial t},$$

wobei wir im letzten Schritt $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ verwendet haben.

d) Die Ladungsverteilung $\rho(x, y, z) = \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z) - 2\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z-1)$ hat ein Monopolmoment und auch ein Dipolmoment.
Der lineare Quadrupol mit $\rho(x, y, z) = \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z-1) - 2\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z) + \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z+1)$ hat kein Monopolmoment, aber ein Quadrupolmoment.

Aufgabe 2: Homogen geladener Zylinder mit Aussparung (6+2 Punkte)

Gegeben sei ein mit der Ladungsdichte ρ_0 homogen geladener, unendlich langer Zylinder mit dem Radius R, dessen Symmetrieachse mit der z-Achse zusammenfällt. In diesem Zylinder sei nun die Ladung in einem ebenfalls zylinderförmigen, unendlichen langen Bereich neutralisiert. Der neutralisierte Bereich ohne Ladungsträger habe dabei einen Radius b und sei um die Distanz $d \geq 0$ in Richtung der y-Achse versetzt, wobei $d + b \leq R$.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld für $x^2 + y^2 \geq R$.

b) Begründen Sie, auf welcher Seite des Zylinders die Kraftwirkung auf eine Punktladung q entlang der y-Achse größer ist. (positive oder negative y)

Lösung:

a) Zunächst berechnen wir das elektrische Feld eines homogen geladenen Zylinders. Durch die Symmetrie hat das elektrische Feld nur eine radiale komponente. Damit vereinfacht sich das Durchflutungsgesetz zu

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, E_r(r)\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_0 r}\begin{cases} \int_0^r r'\rho\, \mathrm{d}r' & r \leq R \\ \int_0^R r'\rho\, \mathrm{d}r' & r \geq R \end{cases}$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0 r}\begin{cases} r^2 & r \leq R \\ R^2 & r \geq R \end{cases}$$

Die Aussparung berücksichtigen wir durch eine Superposition mit einem weiteren Zylinder. Dazu zerlegen wir das Feld zunächst in x und y Komponenten. Mit $r\mathbf{e_r} = x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y}$ erhalten wir

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{x\mathbf{e_x} + y\mathbf{e_y}}{x^2+y^2}\begin{cases} x^2+y^2 & \sqrt{x^2+y^2} \leq R \\ R^2 & \sqrt{x^2+y^2} \geq R \end{cases}$$

Das zu superpositionierende Feld ist durch eine Translation des homogenen Feldes gegeben. Wir verwenden $\rho \to -\rho$, $y \to y-d$ und $R \to b$ und erhalten

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{x\mathbf{e_x} + (y-d)\mathbf{e_y}}{x^2+(y-d)^2}\begin{cases} x^2+(y-b)^2 & \sqrt{x^2+(y-d)^2} \leq b \\ b^2 & \sqrt{x^2+(y-d)^2} \geq b \end{cases}.$$

Die Superposition beider Felder für $x^2+y^2 \geq R^2$ liefert

$$\mathbf{E}_{\text{ges}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(\frac{x\mathbf{e_x}+y\mathbf{e_y}}{x^2+y^2}R^2 - \frac{x\mathbf{e_x}+(y-d)\mathbf{e_y}}{x^2+(y-d)^2}b^2\right).$$

b) Betrachten wir nun die Kraftwirkung auf ein Teilchen, welches sich auf der y-Achse ($x=0$) außerhalb des Zylinders befindet, so erhalten wir

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(x=0, x^2+y^2 \geq R^2) = q\frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(\frac{R^2}{y} - \frac{b^2}{y-d}\right)\mathbf{e_y}$$

Da $|y| \geq R > d$, ist der zweite Term in der Klammer für positive y stets negativ, der erste Term positiv. Tauscht man das Vorzeichen der y-Koordinate, ändert sich nur das Vorzeichen aber nicht der Betrag des ersten Terms. Beim zweiten Term ändert sich ebenfalls das Vorzeichen und zusätzlich wird der Betrag kleiner, da der Nenner größer wird. Demzufolge ergibt sich für $y < -R$ eine größere Kraftwirkung. Es entspricht auch der Intuition, dass die Kraft dort größer ist, wo die Aussparung nicht ist, da so mehr Ladungsträger näher am Teilchen sein können.

Aufgabe 3: Unendlich langer Draht (3+3+2 Punkte)

Auf der z-Achse liege ein (unendlich langer) Draht mit der konstanten Längenladungsdichte λ.

a) Berechnen Sie das von der Anordnung erzeugte elektrostatische Feld.

b) Der geladene Draht wird nun in die x-Richtung um $x_0 > 0$ parallel verschoben. Desweiteren befinde sich in der y-z-Ebene eine unendlich ausgedehnte geerdete Metallplatte. Bestimmen Sie mit der Methode der Spiegelladungen das elektrische Feld für $x > 0$ und zeigen Sie, dass das elektrische Feld auf der Metallplatte nur eine Normalenkomponente besitzt.

c) Geben Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(y)$ an und berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \sigma(y)$.

Lösung:

a) Die Ladungsdichte ist durch $\rho = \lambda\,\delta(x)\,\delta(x)$ gegeben. Das elektostatische Feld des langen Drahtes hat nur eine radiale Komponente (Zylinderkoordinaten). Daraus ergibt sich mit dem Gauß'schen Satz:

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f}\cdot\mathbf{E} = \int_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \mathrm{d}z\,\lambda,$$

wobei $\mathrm{d}\mathbf{f} = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathbf{e_r}$. Sei nun l die Länge des Drahtes, dann erhalten wir

$$2\pi l E_r(r) r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

und somit

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\mathbf{e_r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\,(x^2+y^2)}\,(x\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y})$$

b) Verschieben wir den Draht um $x_0 > 0$ entlang der x-Achse, so können wir das elektrostatische Feld als

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\,((x-x_0)^2+y^2)}\,((x-x_0)\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y})$$

schreiben. Setzen wir in die y-z-Ebene eine unendlich ausgedehnte Platte, so ist das elektrostatische Feld nach der Methode der Spiegelladungen gegeben durch:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\,((x-x_0)^2+y^2)}\,((x-x_0)\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\,((x-x_0)^2+y^2)}\,((x+x_0)\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y})$$

Betrachten wir nun das Feld auf der Platte, d.h. $x = 0$, so erhalten wir

$$\mathbf{E}(0,y,z) = -\frac{\lambda x_0}{\pi\epsilon_0\left(x_0^2+y^2\right)}\,\mathbf{e_x}.$$

Man sieht, dass das Feld auf der Platte nur eine Normalenkomponente, also eine Komponente in x-Richtung besitzt.

c) Die influenzierte Ladung folgt aus dem Sprung der Normalenkomponente von $\mathbf{E}$.

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\big|_{\text{Fläche}} = -\frac{\lambda x_0}{\pi\left(x_0^2+y^2\right)}$$

Für das Integral folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\sigma(y) &= -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{\lambda x_0}{\pi\left(x_0^2+y^2\right)} = -\frac{\lambda x_0}{\pi}\frac{1}{x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2}\\ &\overset{\frac{y}{x_0}=\mu}{=} -\frac{\lambda}{\pi}\arctan\mu\big|_{-\infty}^{\infty} = -\lambda\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Kugelflächenfunktion (4 Punkte)

Gegeben Sei eine Kugel mit Radius R mit einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = \alpha\,\sin\vartheta\,\sin\varphi$. Berechnen Sie das Potential außerhalb der Kugel.

Hinweis:

$$\phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Q_{lm}\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{r^{l+1}} \tag{1}$$

mit den sphärischen Multipolmomenten

$$Q_{lm} \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'^l\,Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi'), \quad m=-l,\dots,l. \tag{2}$$

Die ersten Kugelflächenfunktionen lauten

$$Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \qquad Y_{1\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$$

Lösung:

Zunächst drücken wir die Ladungsdichte mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen aus:

$$\rho(\mathbf{r}) = C\,(Y_{11}+Y_{1-1}) \quad \text{mit} \quad C = -2i\alpha\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$$

Somit können wir die sphärischen Multipolmomente berechnen

$$\begin{aligned}
Q_{lm} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'^l\,Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') \\
&= C\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3\mathbf{r}'\,\big(Y_{11}(\vartheta',\varphi')+Y_{1-1}(\vartheta',\varphi')\big)\,r'^l\,Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}C\int_0^R dr'\,r'^3 & l=1,\ m=1 \\ \sqrt{\frac{4\pi}{3}}C\int_0^R dr'\,r'^3 & l=1,\ m=-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{-2\sqrt{2}\pi}{3}i\alpha R^4 & l=1,\ m=1 \\ \frac{-2\sqrt{2}\pi}{3}i\alpha R^4 & l=1,\ m=-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Das Potential ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}iqR^4\right)\frac{Y_{11}(\vartheta,\varphi)+Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)}{r^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}iqR^4\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{2\pi}}i\right)\frac{\sin\vartheta\,\sin\varphi}{r^2} \\
&= \frac{q}{3\epsilon_0}\frac{R^4}{r^2}\sin\vartheta\,\sin\varphi
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Quadratische Leiterschleife (1+5 Punkte)

Durch eine quadratische Leiterschleife der Seitenlänge $2a$ fließe der Strom I

a) Geben Sie das magnetische Dipolmoment an.

b) Berechnen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt der Schleife.

Lösung:

a) Das magnetische Dipolmoment ist nach der "rechten-Hand-Regel" durch

$$\mathbf{m} = I\mathbf{F} = 4a^2 I \mathbf{e_z}$$

gegeben, wobei F die vom Strom I umflossene Fläche ist. Falls der Stromfluss im Uhrzeigersinn gewählt wird, erhalten wir ein anderes Vorzeichen.

b) Nach dem Biot-Savart'schen Gesetz gilt:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3}$$

wobei $\mathbf{r}$ der Vektor vom Mittelpunkt zu Leiterschleife ist und $d\mathbf{l}$ den Weg entlang der Schleife beschreibt. Jede der 4 Seiten der Leiterschleife liefert den gleichen Beitrag zum Integral. Daher lässt sich das Magnetfeld als

$$\mathbf{B}(0) = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(a,-a)}^{(a,a)} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3}$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} a \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\,dy \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\int \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3} = a \int_{(a,-a)}^{(a,a)} \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}^3} = \left.\frac{ay}{a^2\sqrt{a^2+y^2}}\right|_{-a}^{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

und für das Magnetfeld

$$\mathbf{B}(0) = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{2}}{a}\mathbf{e_z} = \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I}{a\pi}\mathbf{e_z}$$

Die Richtung des Magnetfeldes im Mittelpunkt der Leiterschleife entspricht auch dem Ergebnis aus der "rechten-Hand-Regel".

Aufgabe 6: Plattenkondensator (1+1+3+2 Punkte)

Betrachten Sie einen geladenen Plattenkondensator, der aus zwei kreisförmigen Platten mit Radius R und Plattenabstand a besteht. Die beiden Platten sind mit durch einen dünnen Draht mit hohem Widerstand verbunden.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich auf den Platten die Ladungen $+Q_0$ bzw. $-Q_0$. durch den Draht fließe ein kleiner, stationärer Strom $I = \text{const}$, sodass sich der Kondensator langsam entlädt.

a) Berechnen Sie die Flächenladungsdichten $\sigma(t)$ auf beiden Platten unter der Annahme, dass diese unendlich gut leitfähig sind.

b) berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ zwischen den Kondensatorplatten (Randeffekte werden vernachlässigt).

c) Bestimmen Sie das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ zwischen den Kondensatorplatten.

d) Berechnen Sie die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Feldenergie W zwischen den Platten.

Lösung:

a) Die Änderung der Ladung auf den Platten entspricht dem Strom I. Deshalb gilt

$$Q(t) = Q_0 - I\,t$$

und die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\sigma(t) = \frac{Q(t)}{\pi R^2} = \frac{Q_0 - It}{\pi R^2}.$$

b) Wenn die Randeffekte vernachlässigt werden können, ist das Feld zwischen den Platten (unter Annahme, dass der Strom in z-Richtung fließt) gegeben durch

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_z = \frac{Q_0 - It}{\varepsilon_0 \pi R^2}\mathbf{e}_z. \tag{3}$$

c) Das Magnetfeld erhalten wir direkt aus den Maxwell-Gleichungen in integraler Form (oder aus der differentiellen Form mittels Satz von Stokes). Dabei verwenden wir, dass das Magnetfeld in Zylinderkoordinaten entlang der φ-Richtung zeigen muss, da sowohl der Strom als auch der Verschiebungsstrom (zweiter Term in der Maxwell-Gleichung) in z-Richtung zeigen. Wir betrachten im folgenden einen Kreis mit Radius r um den Draht.
Für $r < R$ finden wir

$$\begin{aligned}
\int_{\partial A} d\mathbf{s}\,\mathbf{B} &= \mu_0 \int_A d\mathbf{A}\,\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_A d\mathbf{A}\,\mathbf{E} \\
\Longrightarrow 2\pi r B &= \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \pi r^2 \frac{d}{dt}E \\
&= \mu_0 I - \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \\
&= \mu_0 I \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).
\end{aligned}$$

Für $r > R$ ist $B = 0$, da sich die Beiträge des Stromes und des Verschiebungsstromes kompensieren. Wir können also allgemein schreiben

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1 - r^2/R^2}{r}\theta(R - r)\,\mathbf{e}_\varphi.$$

d) Die elektromagnetische Feldenergie ist gegeben durch

$$W = \int dV \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)$$

und wir finden für die zeitliche Ableitung

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_0 \int dV \, E \frac{dE}{dt} + \frac{1}{\mu_0} \int dV \, B \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{A} \int dV \, \frac{U}{d} I = -UI.$$