Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Klassische Elekrodynamik —

Abgabe 24. April 2017
Sommersemester

# Übungsserie 3

**Aufgabe 1:** Elektrostatische Energie I (8 Punkte)

Berechnen Sie die Energiedichte und die Gesamtenergie der elektrostatischen Felder, die aus den folgenden Ladungsverteilungen resultieren:

**a)** Homogen geladene Kugelschale mit Ladungsdichte $\rho$

**b)** Kugelschale mit der Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} \frac{\alpha}{r^2} & R_1 < r < R_2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\alpha > 0$. Nutzen Sie hier den Gaußschen Satz zur Bestimmung des elektrischen Feldes.

Nehmen Sie nun an, dass beide Anordnungen die gleiche Gesamtladung $Q$ tragen und drücken Sie Ihre Ergebnisse durch diese aus. Vergleichen Sie anschließend die Feldenergien beider Ladungsverteilungen für den Spezialfall $R_2 \;=\; 2R_1$ und diskutieren Sie das Resultat.

Hinweis: Das elektrische Feld zu a) ist gegeben durch (vgl. Übungsserie 2, Aufgabe 3)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\mathbf{e_r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\,\mathbf{e_r} & R_2 < r. \end{cases}$$

**Aufgabe 2:** Elektrostatische Energie II (4 Punkte)

Gegeben sei die Ladungsverteilung

$$\rho_1(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{\pi a_0^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a_0}.$$

**a)** Berechnen Sie die zu $\rho_1(\mathrm{r})$ gehörige Gesamtladung und das elektrische Feld im gesamten Raum. Was für ein Feld ergibt sich für $r \gg a_0$?

**b)** Betrachten Sie ferner die Ladungsverteilung

$$\rho_1(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{32\pi a_0^3}\,\mathrm{e}^{-r/a_0}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right).$$

Argumentieren Sie ohne Rechnung, welche der gegebenen Ladungsverteilungen mehr elektrostatische Energie enthält. Nehmen Sie dabei an, dass beide Ladungsverteilungen dieselbe Gesamtladung tragen.

Hinweis: Folgende nützliche Identitäten können hierbei verwendet werden:

$$\int_0^\infty dr\, r^n \mathrm{e}^{-r/R} \;=\; n!R^{n+1}, \qquad \int_0^R dr\, r^2 \mathrm{e}^{-r/R} \;=\; -R\mathrm{e}^{-r/R}\left(2R^2 + 2Rr + r^2\right)$$

**Aufgabe 3:** Delta-Distribution (4 Punkte)

Die Diracsche Delta-Distribution kann in einer Dimension über die Eigenschaften

$$\delta(x - x_0) \;=\; 0, \quad x \neq x_0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) \;=\; 1$$

definiert werden. Oft wird die Delta Distribution mit Hilfe von Funktionenfolgen approxmiert.

**a)** Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionenfolgen im Grenzwert $n \to \infty$ die Delta-Distribution approximieren, indem Sie die definierenden Eigenschaften überprüfen.

i) $f_n(x) \;=\; \dfrac{1}{\pi} \dfrac{n}{n^2(x - x_0)^2 + 1}$ ii) $g_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n|x-x_0|} & |x - x_0| > \frac{1}{n^2} \\ n & |x - x_0| \leq \frac{1}{n^2} \end{cases}$

iii) $h_n(x) \;=\; \dfrac{n}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-n^2 \frac{(x-x_0)^2}{2}}$

**b)** Verifizieren Sie die wichtige Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) \;=\; f(x_0)$$

für eine derjenigen Folgen aus a), die die Delta-Distribution approximieren.