Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Klassische Elekrodynamik —

Abgabe 8. Mai 2017
Sommersemester

Übungsserie 5

Aufgabe 1: Zerlegungssatz (3 Punkte)

Welche Beziehung muss zwischen den beiden Konstanten β und γ bestehen, damit das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\alpha}{r^\beta}\left(\gamma\, z\, \mathbf{r} \,-\, r^2\, \mathbf{e}_z\right)$$

außerhalb $\mathbf{r} = 0$ wirbelfrei ist? Für welche Werte dieser Konstanten ist $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zudem quellenfrei? Was beschreibt dieser Fall physikalisch?

Aufgabe 2: Punktladung vor leitender Kugel (10 Punkte)

a) Auf der z-Achse befinde sich bei $z = -l/2$ die Ladung q_1 und bei $z = +l/2$ die Ladung q_2. Überlagern Sie die elektrostatischen Potentiale beider Punktladungen und zeigen Sie für den Fall unterschiedlicher Beträge beider Ladungen, dass die Äquipotentiallinie $\Phi_0 = 0$ ein Kreis in der (x, z)-Ebene ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius dieses Kreises.

b) Eine Punktladung Q_1 befinde sich vor einer geerdeten leitenden Kugel mit dem Radius R. Der Abstand der Ladung vom Kugelmittelpunkt sei s_1. Bestimmen Sie mit der Methode der Bildladungen das Potential dieser Anordnung. Machen Sie dabei von dem Ergebnis des Aufgabenteils a) Gebrauch, um Größe und Lage der Spiegelladung Q_2 zu bestimmen.

Hinweis: Wählen Sie ein Koordinatensystem, in welchem der Ursprung mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt und transformieren Sie die Ergebnisse von Augabenteil a) auf dieses Koordinatensystem.

c) Berechnen Sie für die Anordnung aus b) die durch die äußere Punktladung auf der Kugel influenzierte Ladungsverteilung und diskutieren Sie deren Abhängigkeit vom Abstand s_1. Wie groß ist die influenzierte Gesamtladung?

Aufgabe 3: Punktladung in 2D (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Poissongleichung durch die (Greensche) Funktion

$$-\epsilon_o \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \ln \left(C \, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right)$$

mit C = const. gelöst wird. Nutzen Sie dazu die folgenden Schritte:

a) Zeigen Sie, daß für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ gilt:

$$-\epsilon_o \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \, .$$

b) Zeigen Sie, daß für eine beliebig kleine Umgebung V von $\mathbf{r}'$ gilt:

$$-\epsilon_o \int d^2 r \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 \, .$$

Damit ist $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ offenbar die 2-dimensionale Greensche Funktion des Differentialoperators $-\epsilon_o \, \Delta_2$ und $\Phi(\mathbf{r}) = q \, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ das Potenzial einer Punktladung am Ort $\mathbf{r}'$ in der Ebene.