Übungsserie 6

Aufgabe 1: Methoden der Funktionentheorie (1+1+3+3+2+2 Punkte)

Betrachten wir ein zweidimensionales Problem so lässt sich eine neue Variable $z = x + iy$ einführen. Diese neue Variable darf nicht mit der z-Komponente verwechselt werden, die im folgenden ignoriert wird. So wird also jeder Koordinate in $\mathbb{R}^2$ eine Koordinate in $\mathbb{C}$ zugeordnet. Eine Funktion $F(z)$, wobei $z \in \mathbb{C}$, lässt sich wiederum als Summe zweier reeller Funktionen U und V schreiben:

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Diese beiden reellen Funktionen erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

a) Zeigen Sie, dass U und V im allgemeinen die zweidimensionale Laplace-Gleichung lösen, also elektrostatische Potentiale sind.
b) Zeigen Sie, dass die Feldlinien der Potentiale U und V stets senkrecht aufeinander stehen.
c) Verifizieren Sie für die Funktion $F_1(z) = \sqrt{z}$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
d) Geben Sie ein physikalisches Beispiel an, dessen Äquipotentiallinien durch $\mathrm{Im}(F_1(z)) = \mathrm{const}$ gegeben sind und skizzieren Sie die Äquipotential- und Feldlinien. Welche geometrische Gestalt haben die Kurven?
e) Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass U_2 und V_2 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lösen. Geben Sie die dazugehörige Funktion $F_2(z)$ an.

$$U_2(x, y) = x^a - y^2 \qquad \text{und} \qquad V_2(x, y) = bx^c y$$

f) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für $U_2(x, y)$ und vergleichen Sie diese mit den Äquipotentiallinien in der Nähe eines Punktes, der sich auf halber Strecke zwischen zwei gleichen Punktladungen befindet (Skizze)!
Hinweis: Die Relationen

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}} \qquad \text{und} \qquad \sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}}$$

könnten nützlich sein.

Aufgabe 2: Zylinderkondensator (1+3+2 Punkte)

Gegeben Sei ein langer Zylinderkondensator, der aus zwei konzentrischen Zylindern der Radien

$R_1 < R_2$ besteht. Der Innere Zylinder trage die Ladung Q.

a) Erläutern Sie in einem Satz wieso es genügt, das Problem zweidimensional zu betrachten.

b) Überführen Sie den Zylinderkondensator mittels der Abbildung $\ln(z) = u + iv$, mit $u, v \in \mathbb{R}$, in einen Plattenkondensator. Skizzieren Sie diesen in der (u, v)-Ebene und berechnen Sie seine Kapazität mit $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$, wobei A die Fläche der Kondensatorplatten und d der Abstand der beiden Platten ist.

c) Berechnen Sie die Kapazität des Zylinderkondensators mit Hilfe des Gaußschen Satzes und vergleichen Sie ihre Ergebnisse.

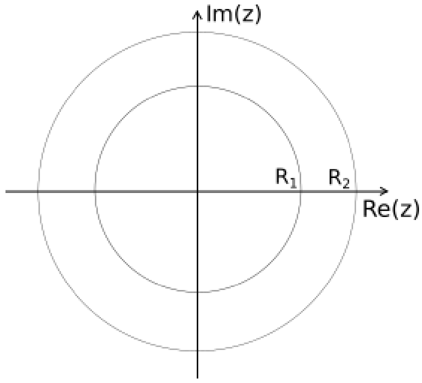

Fig1: Zylinderkondensator in der Komplexen Ebene. Die Radien der Kondensatoren sind R_1 und R_2

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptzweig des Logarithmus, der wie folgt definiert ist:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$$

mit $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$. (Warum?)

Aufgabe 3: Greensche Funktion (1+3+(3) Punkte)

Betrachten Sie eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ vor einer leitenden, geerdeten Kugel mit Radius R. Nehmen Sie an, dass die Kugel ihren Mittelpunkt im Koordinatenursprung hat.

a) Bestimmen Sie ohne Rechnung die Greensche Funktion der Kugel für Dirichlet-Randbedingungen aus dem bereits bekannten Potential einer Punktladung vor der Kugel ($\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, vgl. Übungsserie 5, Aufgabe 2):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'|} \right)$$

b) Bestimmen Sie das Potential eines Punktdipols vor der Kugel mit Hilfe der Greenschen Funktion. Der Dipol befinde sich am Punkt $\mathbf{r_p} = (0, 0, s)$ und trage das Dipolmoment $\mathbf{p}$. Die Kugeloberfläche sei auf dem Potential $\phi_0 = 0$.

Hinweis: Folgende Identität kann nützlich sein:

$$\nabla' \left(\frac{R/r'}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'|} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r_p}} = -\frac{rR}{(R^2 - rs)^2}\, \mathbf{e_r}$$

Zusatz) Betrachten Sie nun eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ vor der Kugel, die als Randbedingung auf der Kugeloberfläche das Potential $\phi(\mathbf{r})|_{\partial B} = \phi_0(\vartheta, \varphi)$ trage. Finden Sie einen Ausdruck für das Potential im Außenraum der Kugel mit Hilfe der in **a)** bestimmten Greenschen Funktion.