Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Klassische Elekrodynamik —

Abgabe 29. Mai 2017
Sommersemester

Übungsserie 8

Aufgabe 1: Separationsansatz (1+2+1+2+2 Punkte)

Die Laplacegleichung eines elektrostatischen Potentials ist in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right) = 0$$

Um Lösungen dieser Gleichung zu finden, wählen wir den Ansatz

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}\,P(\cos\vartheta)\,S(\varphi)$$

a) Verwenden Sie diesen Ansatz und separieren sie die Differentialgleichung so, dass die linke Seite nur von φ und die rechte Seite nur von ϑ und r abhängt. Führen Sie die Separationskonstante "$-m^2$" ein.

b) Lösen Sie die erhaltene Differentialgleichung für S. Warum muss m ganzzahlig sein?

c) Betrachten Sie nun die verbleibende Differentialgleichung, welche von ϑ und r abhängt. Trennen Sie auch diese Differentialgleichung und führen Sie eine zweite Separationskonstante "λ" ein.

d) Zeigen Sie, dass man unter Verwendung der Substitution $x = \cos\vartheta$ für R, Q und S folgende Gleichungen erhält:

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} - \frac{\lambda}{r^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0 \tag{2}$$

$$S_m(\varphi) = e^{im\varphi} \qquad \text{mit} \qquad m\in\mathbb{Z}$$

e) Falls $m = 0$, ist das Problem zylindersymmetrisch. Gleichung (2) hat mit $\lambda = l(l+1)$ die Lösung

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \qquad l = 0,1,2...$$

Gleichung (1) kann geschrieben werden als

$$\frac{r^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} = l(l+1). \tag{3}$$

Zeigen Sie dass $R_l = (a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l})$ eine Lösung von Gleichung (3) ist und sich das Potential allgemein schreiben lässt als

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\vartheta) \tag{4}$$

Aufgabe 2: Homogen geladener (sehr) dünner Ring(1+1+4 Punkte)

a) Geben Sie die Ladungsverteilung eines sehr dünnen homogen geladenen Kreisrings mit Radius R der Gesamtladung Q in der $x-y-$Ebene an, dessen Mittelpunkt bei $z=0$ liegt.
b) Berechnen Sie das Potential des Rings auf der $z-$Achse durch einfache Integration.
c) Verwenden Sie das Ergebnis (4) aus Aufgabe 1 und vergleichen Sie es mit dem Potential auf der $z-$Achse um einen allgemeinen Ausdruck für das Potential zu anzunähern (2. Ordnung). Unterscheiden Sie dabei die Fälle $r < R$ und $r > R$, wobei r der Betrag des Ortsvektors in Kugelkoordinaten ist.

Hinweis: $P_l(1) = 1$

Aufgabe 3: Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten (3+4+3 Punkte)

Für Betrachtungen im Fernfeld einer lokalisierten Ladungsverteilung ist es oft sinnvoll, eine Multipolentwicklung nicht in kartesischen, sondern in Kugelkoordinaten durchzuführen.

a) Betrachten Sie das Potential der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$,

$$\phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{r}'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{r}'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}},$$

wobei γ der von $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$ und $\mathbf{r}' = (r', \vartheta', \varphi')$ eingeschlossene Winkel ist. Zeigen Sie, dass $\phi(\mathbf{r})$ für $r > r'$ auch geschrieben werden kann als

$$\phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Q_{lm}\,\frac{Y_{lm}(\vartheta,\varphi)}{r^{l+1}} \tag{5}$$

mit den **sphärischen Multipolmomenten**

$$Q_{lm} \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'^l\,Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi'), \quad m=-l,\ldots,l. \tag{6}$$

Hierbei beschreibt $l = 0$ das Monopol-, $l = 1$ das Dipol- und $l = 2$ das Quadrupolmoment.

b) Geben Sie mit Hilfe von (6) und der expliziten Form der Kugelflächenfunktionen Y_{lm} die sphärischen Monopol- und Dipolmomente an. Drücken Sie diese durch die entsprechenden Momente in kartesischen Koordinaten aus.

c) Berechnen Sie die sphärischen Monopol- und Dipolmomente der Verteilung (vgl. ÜS 4, A1)

$$\rho(r,\vartheta) \;=\; \frac{Q}{\pi R^2}\cos\vartheta\,\delta(r-R).$$

durch Integration in Kugelkoordinaten und geben Sie das resultierende Potential im Außenraum an.

Hinweis: In den Herleitungen können die im Anhang aufgeführten Identitäten verwendet werden.

Anhang

Legendre-Zerlegung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,x\,t+t^2}} \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\,t^l$$

Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

Für den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel γ gilt in Kugelkoordinaten

$$\cos\gamma \;=\; \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi'),$$

wobei (φ,ϑ) und (φ',ϑ') die Azimuthal- und Polarwinkel der beiden Vektoren sind. Damit gilt:

$$P_l(\cos\gamma) \;=\; \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')$$

Kugelflächenfunktionen

Die ersten Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch folgende Ausdrücke:

$$Y_{00} \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{1,-1} \;=\; \frac{3}{\sqrt{8\pi}}\sin\vartheta \mathrm{e}^{-i\varphi}, \quad Y_{10} \;=\; \frac{3}{\sqrt{4\pi}}\cos\vartheta, \quad Y_{11} \;=\; -\frac{3}{\sqrt{8\pi}}\sin\vartheta \mathrm{e}^{i\varphi}$$

Für alle l und $m=-l,\ldots,l$ gilt zudem: $Y_{l,-m}(\vartheta,\varphi) \;=\; (-1)^m Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)$

Legendrepolynome

Die ersten Legendrepolynome sind gegeben durch folgende Ausdrücke (Aufgabe 2):

$$P_0\,(\cos\vartheta) = 1 \qquad P_1\,(\cos\vartheta) = \cos\vartheta \qquad P_2\,(\cos\vartheta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta\, - 1\right)$$