

Übungsserie 9

Aufgabe 1: Stromdurchflossener Hohlzylinder (4 Punkte)

Ein unendlich langer Hohlzylinder (Innenradius R_1 , Außenradius R_2) wird homogen von einem Strom I durchflossen. Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mit dem Ampèreschen Gesetz im Innen- und Außenraum sowie im Zylindermantel. Skizzieren Sie $|\mathbf{B}|$ als Funktion des Abstands von der Achse.

Aufgabe 2: Stromdurchflossene Leiterschleife (3+4+2 Punkte)

In einer kreisförmigen Leiterschleife ist die Stromdichte in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gegeben durch

$$\mathbf{j} = I \delta(r - R) \delta(z) \mathbf{e}_\varphi.$$

a) Zeigen Sie, dass das magnetische Vektorpotential dieser Anordnung die Form $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\varphi(r, z) \mathbf{e}_\varphi$ hat und gegeben ist durch das elliptische Integral

$$A_\varphi(r, z) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{r^2 + R^2 + z^2 - 2rR \cos \varphi'}}. \quad (1)$$

b) Berechnen Sie das Vektorpotential mittels Gleichung (1) für die Fälle $r \ll R$ und $r \gg R$. Zeigen Sie, dass sich für große Abstände ein Dipolpotential der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ergibt und bestimmen Sie das Dipolmoment \mathbf{m} .

Hinweis: Vereinfachen Sie (1) für beide Spezialfälle, indem Sie geeignete Taylorentwicklungen im Integranden vornehmen.

c) Berechnen Sie das Magnetfeld für die Fälle $r \ll R$ und $r \gg R$.

Aufgabe 3: Helmholtz-Spulen (4+2 Punkte)

Zwei parallele kreisförmige Leiterschleifen werden jeweils von einem konstanten Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Die Schleifen liegen parallel zur x - y -Ebene und haben jeweils den Radius R . Ihre Mittelpunkte liegen bei $(0, 0, b)$ und $(0, 0, -b)$.

a) Bestimmen Sie das Vektorpotential dieser Anordnung als Superposition der Vektorpotentiale

der einzelnen Leiterschleifen. Gehen Sie dabei von Gleichung (1) aus. Entwickeln Sie das Vektorpotential in der Nähe des Koordinatenursprungs bis zu den Ordnungen r^3 und rz^2 .

b) Welche Beziehung muss zwischen dem Radius R und dem Abstand $D = 2b$ der Leiterschleifen gelten, damit das Magnetfeld in diesem Bereich möglichst homogen ist? Finden Sie für diesen Fall Vektorpotential und Magnetfeld nahe des Ursprungs.