Klassische Elektrodynamik

— Notizen zur Vorlesung —

SS 2017

http://www.atomic-theory.uni-jena.de/ $\rightarrow$ Teaching $\rightarrow$ Elektrodynamik

(Notizen, Aufgaben, etc.)

Stephan Fritzsche

Helmholtz-Institut Jena &

Theoretisch-Physikalisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fröbelstieg 3, D-07743 Jena, Germany

(Email: s.fritzsche@gsi.de, Telefon: +49-3641-947606, Raum 204)

Hinweise auf Druckfehler bitte an etc. to s.fritzsche@gsi.de.

23. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

0. Vorbetrachtungen

0.1. Ablauf und Vereinbarungen

Vorlesungszeit:	03. 04. 2017 – 07. 07. 2017
Vorlesung:	Mo 12 – 14, Physik, HS 2
	Do 10 – 12, Abbeanum, HS 2
Übungen:	Mi 16 – 18, SR 4, Physik (Birger Böning)
	Fr 8 – 10, SR 5, Physik (Willi Paufler, Lehramt)
Tutorium:	Do, 16 – 18, SR 4, Physik (Clemens Anschütz)
ECTS Punkte:	8 (inklusive einiger ‘Quickies’ und einer erfolgreichen schriftl. Klausur).
Prüfungsleistung:	Erfolgreiche Klausur (70 %) ‘plus’ Übungen und Quickies (30 %).
Prüfungszulassung:	Modulanmeldung innerhalb der ersten 6 Wochen sowie mindestens 50 % der Punkte aus den Übungen.
Klausur:	Donnerstag, 13. Juli 2017, 8 – 10, Abbeanum, HS 2;
	(1. Wiederholung/Nachklausur: Donnerstag, 12. Oktober 2017, 8 – 10, HW 5, HS 2)
Informationen für uns:	siehe Übungen.

Selbststudium und Fragen während Vorlesung:

0.2. Literaturhinweise

- F. Scheck: *Theoretische Physik: 3. Klassische Feldtheorie* (Springer, Berlin, 2005).
- T. Fließbach: *Elektrodynamik* (Spektrum, Akademischer Verlag, 2005).
- E. Rebhan: *Theoretische Physik: Elektrodynamik* (Elsevier, 2007).
- W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik III: Elektrodynamik* (Springer. Spektrum, 2013).
- J. D. Jackson: *Klassische Elektrodynamik* (de Gruyter, Berlin, 2006)
- L. D. Landau und E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie* (Akademie-Verlag, Berlin, 1989).
- P. Reineker, M. Schulz und B. M. Schulz: *Theoretische Physik II, Elektrodynamik* (Wiley-VCH, 2006).
- R. P. Feynman, R. B. Leighton und M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I-III (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1971).
- Ferner gibt es im Web eine Vielzahl von empfehlenswerten Skripts; siehe unter: `http://www.physikmethoden.de/elektrodynamik.html`

1. Einführung in die Elektrodynamik

1.1. Klassische Mechanik: Ein kurzer Blick zurück

- Objekte: Massenpunkte, Systeme von Massenpunkte, starre Körper.
- Kinematik: Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ im Raum.
- Dynamik: Kräfte als Ursache einer nichttrivialen Beweggung, $\ddot{\mathbf{r}} \propto \mathbf{F}$.

1.2. Klassische Elektrodynamik (ED): Gegenstand und Anliegen

- Objekte: elektrische Ladungen, Ladungsverteilungen, Ströme, Felder.
- Kräfte: Statische Ladungen spüren elektrische Kräfte und bewegte Ladungen auch magnetische Kräfte ... Elektromagnetismus bzw. em Wechselwirkung.
- Feldbegriff: Nützliche Abstraktion zur Beschreibung der Wirkung von Kräften.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$ ... elektrische Feld,

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{F}|}{\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}}$$ ... magnetisches Feld,

$$\mathbf{j} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{F}$$ ... Rechtssystem

Felder sind Träger von Energie, Impuls, Drehimpuls.

1.3. Einige historische Fakten zur Entwicklung der ED

Ein paar Personen und Daten vorab:

- Erste Beobachtungen zum Elektromagnetismus wurden bereits von den ‘alten’ Babyloniern, Griechen und Römer gemacht.
- Um 1100 etwa kommt der Kompaß nach Europa.
- Magnetischen Eigenschaften kleiner Magnete (Petrus Peregrinus, 13. Jh.); William Gilbert (16. Jh) erkennt ferner, daß die Magnetpole eines Magneten sich nicht durch Zerbrechen trennen lassen.
- Nicolo Cabeo (1586–1650) findet um 1629 heraus, dass sich elektrisch geladene Körper voneinander abstoßen können.
- Otto von Guericke (1602–1686) entwickelt eine der ersten Reibungselektrisiermaschinen.
- Leidener Flasche (1745/46): ist die älteste Form eines Kondensators; sie ermöglicht qualitative und erste quantitative Untersuchungen zur Elektrostatik.
- Benjamin Franklin (1706–1790) unterscheidet ab 1747 zwischen positiven und negativen Ladungen und bemerkt die Ladungserhaltung; es gibt keine elektrostatischen Kräfte in Leitern.
- Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) entdeckt um 1785 das Coulombsche Gesetz.
- Alessandro Volta (1745–1828) erfindet 1799 die (Voltasche) Batterie und gilt als einer der Begründer der Elektrizitätslehre.
- Hans Christian Örsted (1777–1851) findet um 1820: ein elektrischer Strom verursacht ein Magnetfeld.
- Michael Faraday (1791–1867) entdeckt 1831/32: Wechselspiel zwischen E- und B-Feldern.
- James Clerk Maxwell (1831–1879) formuliert 1864: Maxwell-Gleichungen.
- Heinrich Hertz (1857–1894) findet 1888: experimenteller Nachweis, daß Licht = elektromagnetische Wellen sind.

1.4. Das Coulombsche Gesetz

Coulombkraft und Coulomb-Gesetz: Zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 mit Abstand $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ wirkt auf die Ladung q_1 die Zentralkraft

$$\text{Zentralkraft auf } q_1 : \qquad \mathbf{F}_1 = k\, q_1\, q_2 \, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \qquad k > 0 \qquad \text{... gleichnamige Ladungen} \tag{1.1}$$

entlang der Verbindungslinie. Dies ist ein (rein) empirischer Befund, der in zahlreichen Experimenten bestätigt wurde (und wozu im Rahmen der klassischen ED keine widersprechenden experimentellen Befunde bekannt sind).
Coulomb-Gesetz = Grundlage der Elektrostatik.

- **Empirische Befunde zur Coulombkraft:**
- 3. Newtonsches Axiom *(actio = re-actio)* bzw.: $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$;
- proportional zum Produkt der Ladungen: gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, daher offenbar $k > 0$;
- Superpositionsprinzip: die auf eine Ladung wirkende Coulombkraft ist gleich der (vektoriellen) Summe der Coulombkräfte aller anderen Ladungen; gesamte Coulombkraft = (vektorielle) Summe: Coulombkräfte aller anderer Ladungen.

1.4.a. Elektrische Ladung & elektrisches Feld

Elektrische Ladung q ist Meßgröße: für eine Testladung $\tilde{q}$ liefert die Messung des Kräfteverhältnisses bzgl. zwei Punktladungen zugleich auch das Ladungsverhältnis

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2}\,.$$

N Ladungen $q_1, q_2, ..., q_N$ an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$, dann erfährt eine Testladung $\tilde{q}$ am Ort $\mathbf{r}$ die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k\,\tilde{q}\sum_i^N q_i\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} = \tilde{q}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{1.2}$$

Verhältnis $\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{\tilde{q}}$ definiert elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bzw. elektrische Feldstärke.

- Elektrisches Feld als Meßgröße: ... Probeladung; $\tilde{q} \rightarrow 0$ soll hinreichend klein sein, so daß die Ladungsverteilung $q_1, q_2, ..., q_N$ nicht gestört wird.

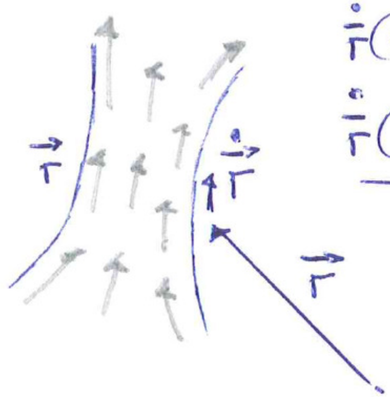
1.4.b. Konzept des elektromagnetischen Feldes

- Feldbegriff: Ein Feld beschreibt allgemein eine räumliche (und zeitliche) Verteilung einer physikalischen Größe, z.B. Temperatur oder Dichtefelder. Wert des Feldes an einem bestimmten Ort wird oftmals Feldstärke $F(\mathbf{r})$ genannt.
- Unterscheide entsprechend: Skalarfelder (Temperatur, Dichte, Gravitationspotential)
  Vektorfelder ($\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Feld, Vektorpotential) oder
  Tensorfelder 2. und höherer Stufe (em Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, Energie-Impuls-Tensor).
- Felder besitzen oftmals eine physikalische Realität und erfüllen Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen).

1.4.c. Physikalische Felder; Feldbegriff

- ➢ Darstellung von Skalar- und Vektorfeldern:
- ➢ Definition von Skalar- und Vektorfeldern (Ortsvektor).
- ➢ Feldlinien eines Vektorfeldes; definierende Gleichung.
- ➢ Inhalt der Vektoranalysis: Nabla, Tabelle, Schreibweisen; Nabla ist kovariant.

Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$



$\dot{\vec{r}}(t) \parallel \vec{v}$

$\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{v} = 0$

1.5. Maßsysteme und Einheiten

Wir sahen im Coulombgesetz (1.1) bereits die Proportionalität zwischen der Kraft und dem Produkt aus den Ladungen und dem (inversen) Abstand. Wenn die Kraft in Newton [kg m / s^2] und der Abstand in Metern gemessen wird, dann:

$$F = k\, q_1\, q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \qquad \Longrightarrow \qquad [N\, m^2] = [k\, q^2]$$

⇝ Wir können entweder die Einheit von k oder q festlegen; zwei häufige Definition aus der Literatur:

SI oder MKAS-System (Experiment):

- Historisch wurde die Ladungseinheit Coulomb (C = As) lange vor der Messung der Elementareinheit (e) festgelegt mittels der Abscheidung von Silber aus einer Silbernitratlösung beim Fließen eines gewissen Stromes.
- Für die Elementarladung und die Konstante k gilt mit dieser Festlegung (1 C = 1 As):

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \qquad \Longrightarrow \qquad k \equiv \frac{1}{4\pi\, \epsilon_o} = 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N\,c^2}}{\mathrm{A^2}} \approx 9 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

MKAS-System: Meter, Kilogramm, Ampere, Sekunden, also die gesetzlichen Standardeinheiten.

- In diesem Maßsystem wird die Konstante k oftmals in der Form $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ geschrieben, wobei ϵ_0 auch als Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder Permittivität des Vakuums bekannt ist.

$$\epsilon_0 = 8.854... \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

- Das MKAS-System ist das offiziell festgelegte und in vielen Büchern verwendete System, indem alle experimentellen Größen in SI Einheiten genutzt werden.
- Das MKAS-System wird (entsprechend unserer Vereinbarung) in dieser Vorlesung verwendet.

Gauß-System (Theorie):

- In vielen Formeln und Herleitungen ist es dagegen einfacher, $k \equiv 1$ zu setzen.
- Die Einheit für die Ladung (1 esu ... electrostatic unit) ergibt sich dann, wenn zwei Ladungen betrachtet werden, die bei festem Abstand gerade die Kraft von 1 N aufeinander ausüben.
- Definition:

$$\text{electrostatic unit} \qquad 1\,\text{esu} = \frac{\text{cm}^{3/2}\,\text{g}^{1/2}}{\text{s}}$$

- Für die Elementarladung und die Umrechung von Ladungen ergibt sich hiermit:

$$e = 4.803 \cdot 10^{-10}\,\text{esu}; \qquad 1\,\text{esu} = 3.3 \cdot 10^{-10}\,\text{C}; \qquad \frac{\text{C}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^{9}\,\text{esu}\,.$$

- Das Gauß-System wird oftmals in Theoriebüchern verwendet; es offenbart die relativistische Struktur der ED besonders gut.

1.6. Maxwell-Gleichungen

➢ Zentrale Größen der ED: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ ... definiert durch Kraftwirkungen auf bewegte Punktladung

In der Elektrodynamik (ED) sind das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ die beiden zentralen Größen, die durch ihre Kraftwirkungen auf eine Punktladung definiert werden (Lorentzkraft).

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = q\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \qquad \text{... } \mathbf{r},\ \mathbf{v} \quad \text{Ort und Geschwindigkeit der Ladung}$$

➢ $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ wird oftmals auch magnetische Induktion oder magnetische Flußdichte genannt.

➢ Maxwell-Gleichungen = Feldgleichungen der ED: sind die Bewegungsgleichungen für das raumzeitliche Verhalten der elektrischen und magnetischen Felder.

➢ SI-System:

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}, \qquad \text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \rho = \rho(\mathbf{r},t) \quad \text{... Ladungsdichte} \tag{1.3}$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad \text{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2\,\epsilon_o}\mathbf{j} \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \quad \text{... Stromdichte} \tag{1.4}$$

. Maxwell-Gleichungen im Vakuum.

➢ Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ heißen auch die Quellen des em Feldes.

➢ Die in den SI-Einheiten auftretenden Konstanten heißen:

$$\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \qquad \text{... Permittivitaet oder Dielektrizitaetskonstante des Vakuum}$$

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{N}{A^2} \qquad \text{... Induktionskonstante, magnetische Feldkonstante}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_o\,\mu_o} \qquad \text{... Lichtgeschwindigkeit}$$

➢ Gauß-System:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\,\pi\,\rho\,, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\,\pi}{c}\mathbf{j}\,.$$

➢ Maxwell-Gleichungen: Empirisch gefundene Grundgesetze der Physik, die folglich nicht herleitbar sind.

➢ Aus diesen Gleichungen lassen sich (auch heute noch) zahlreiche Beziehungen und Folgerungen herleiten, die dann experimentell geprüft werden können und müssen.

1.7. Einschub: Weitere Erinnerung an die Vektoranalysis

1.8. Elektrodynamik in Medien

In Materie, d.h. Plasmen, Gasen oder Festkörpern, sind die (mikroskopischen) Felder oftmals nicht bekannt. Man möchte jedoch vor allem die Reaktion von Materie auf zusätzliche äußere Felder kennen, ohne die mikroskopischen Felder im Detail untersuchen zu müssen. — Ziel der Elektrodynamik in Medien ist es, diese Reaktion mit Hilfe von Materialgleichungen und effektiven Feldern zu charakterisieren und zu beschreiben.

Maxwell-Gleichungen in Materie:

- Die Maxwell-Gleichungen (1.3–1.4) gelten in derselben Form auch in Materie, falls $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ die totalen mikroskopischen elektrischen und magnetischen Felder und $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die totalen mikroskopischen Quellen bezeichnen.

$$\text{gesamtes (Feld)} \;=\; \text{intern} \;+\; \underbrace{\text{extern} \;+\; \text{induziert}}$$

... diese Feldern sind allerdings nicht unabhängig voneinander

- Diese mikroskopischen Felder und Quellen sind jedoch die Summe aus den ungestörten Quellen bzw. Feldern innerhalb des Mediums sowie den externen und induzierten Quellen bzw. Feldern.
- Aus der Linearität der Maxwell-Gleichungen folgt dann, daß die Gleichungen (1.3–1.4) jeweils unabhängig für die ungestörten, externen und induzierten Felder gelten. Dies ist allerdings nicht sehr nützlich, da die externen und induzierten Felder nicht unabhängig betrachtet werden können.
- Makroskopische Maxwell-Gleichungen: Die Form der Gleichungen (1.3–1.4) läßt sich weitgehend erhalten, falls wir eingeführen:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \;=\; \epsilon_o\, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{... dielektrische Verschiebung} \qquad \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \;=\; c^2\, \epsilon_o\, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{... magnetische Feldstaerke} \qquad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$$

und wobei $\mathbf{P}$ die durch das elektrische Feld induzierte Polarisation und $\mathbf{M}$ die induzierte Magnetisierung bezeichnen.

- Die historischen Bezeichnungen für $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ sind leider nicht sehr aussagekräftig.
- Die Polarisation $\mathbf{P}$ beschreibt hierbei das pro Volumeneinheit induzierte elektrische Dipolmoment und die Magnetisierung $\mathbf{M}$ das pro Volumeneinheit induzierte magnetische Dipolmoment.
- Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen können durch geeignete Mittelungen über die mikroskopischen Freiheitsgrade aus den (sogenannten mikroskopischen) Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden.
- Makroskopische Maxwell-Gleichungen (in Materie):

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}\,. \tag{1.6}$$

- Die Ladungsdichte $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)$ beschreiben hierbei die externen Quellen des Feldes.
- Diese makroskopischen Gleichungen gelten näherungsweise für die Kopplung des em Feldes an Materie; sie beschreiben viele aber sicher nicht alle Phänomene der ED in Materie.

1.9. Aufgaben

Siehe Übungen.

2. Elektrostatik

2.1. Feldgleichungen der Elektrostatik

Die vier gekoppelten Maxwell-Gleichungen (1.3–1.4) zerfallen für $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(t)$ und $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}(t)$ in zwei unabhängige Paare, die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik.

2.1.a. Differentielle Form

Statische Vektorfelder sind allgemein durch die Angabe ihrer Quellen und Wirbel vollständig bestimmt.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \tag{2.1}$$

- **Diskussion der elektrostatischen Gleichungen:**
- Quelldichte des elektrostatische Feld wird durch die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ bestimmt.
- Da $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ wirbelfrei, kann das (vektorielle) elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ durch ein skalares Potenzial $\Phi(\mathbf{r}, t)$ vollständig charakterisiert werden:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\,\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}, t)\,.$$

- ‘wirbelfrei’:
- Potenzialgleichung: $\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o}\,.$

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o} & \text{Poisson} - \text{Gleichung} \\ 0 & \text{Laplace} - \text{Gleichung; ausserhalb der Ladungen} \end{cases}$$

beschreibt lokalen Zusammenhang zwischen elektrostatischem Potenzial und Ladungsdichte

2.1.b. Integrale Form der ES

Während die differentielle Form die Änderungen der Felder in ihrer Richtung und Stärke beschreiben, sind die integralen Darstellungen mitunter physikalisch anschaulicher.

Gaußsches Gesetz:

$$\operatorname{div}\,\mathbf{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad \Longrightarrow \qquad \oint_{\partial B} d\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} \int_B dV\,\operatorname{div}\,\mathbf{E} \;=\; \int_B dV\,\frac{\rho}{\epsilon_o} \;=\; \frac{Q}{\epsilon_o}$$

Oberflächenintegral über elektrisches Feld ist gleich der eingeschlossenen Ladung (über ϵ_0)

Linienintegrale im elektrostatischen Feld sind wegunabhängig:

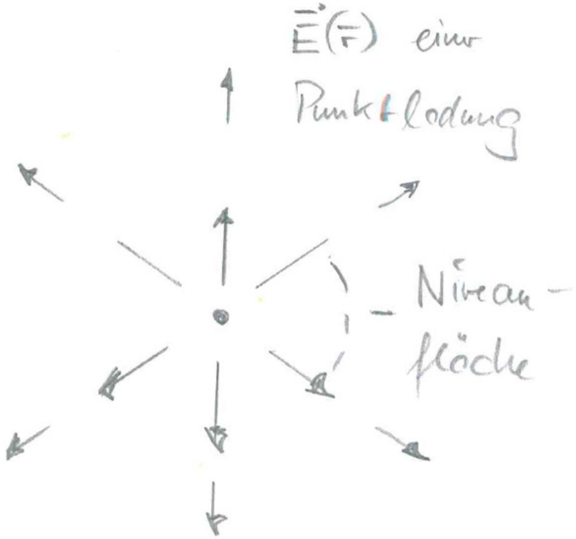
$$\operatorname{rot}\,\mathbf{E} \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \oint_{\partial A} d\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} \;=\; \int_A d\,\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\,\mathbf{E} \;=\; 0$$

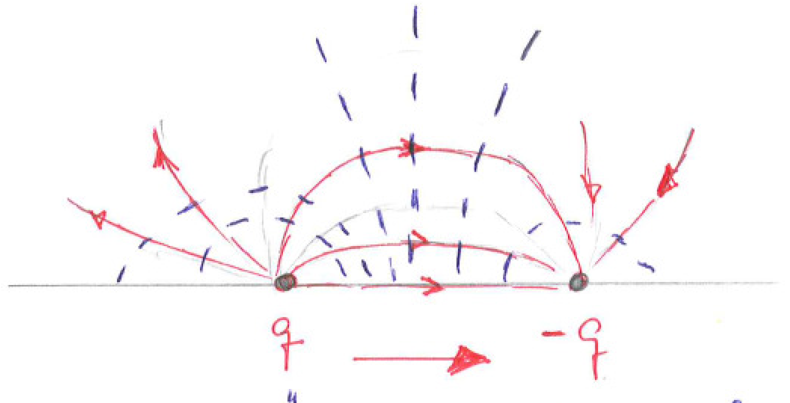
Wegintegrale (Arbeit) beim Verschieben einer Ladung sind durch Anfangs- und Endpunkte eindeutig bestimmt

2.2. Statische elektrische Felder

Feldstärke für Probleladung: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})/\tilde{q} = \frac{q_i}{4\pi\,\epsilon_o}\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}$

Aus der Superposition der Kräfte folgt auch die Superposition der Felder.





Feldlinien und Äquipotenzialflächen für zwei Punktladung; rotationssymmetrisch um die Verbindungsachse.

2.2.a. Systeme von Punktladungen

➢ N Ladungen $q_1, ..., q_N$ an den Orten $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N$, dann:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i^N \frac{q_i}{4\pi\,\epsilon_o} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \qquad \rightsquigarrow \qquad \Phi(\mathbf{r} = \sum_i^N \frac{q_i}{4\pi\,\epsilon_o} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

➢ Lösung der inhomogenen Feldgleichung der Elektrostatik

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \sum_i^N q_i \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_i^N q_i\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(\mathbf{r}) = \sum_i^N q_i\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,.$$

Ladungsdichte der N Punktladungen

2.2.b. Kontinuierliche Ladungsverteilungen. E-Feld und Potenzial

➢ Endliche und stetige Ladungsverteilung: kann als Überlagerung von N Punktladungen aufgefaßt werden

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_B d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_i^N \int_{\Delta B_i} d^3r'\rho(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx \sum_i^N \underbrace{\left(\int_{\Delta B_i} d^3r'\rho(\mathbf{r}')\right)}_{q_i} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = \sum_i^N q_i\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,,$$

➢ Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \sum_i^N q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} = \sum_i^N \Delta B_i\,\frac{\rho(\mathbf{r}_i)}{4\pi\,\epsilon_o} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \approx \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \int_B d^3r'\,\rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

➢ Auch im Grenzfall $\Delta B_i \to 0$ und $N \to \infty$ erfüllt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \int_B d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

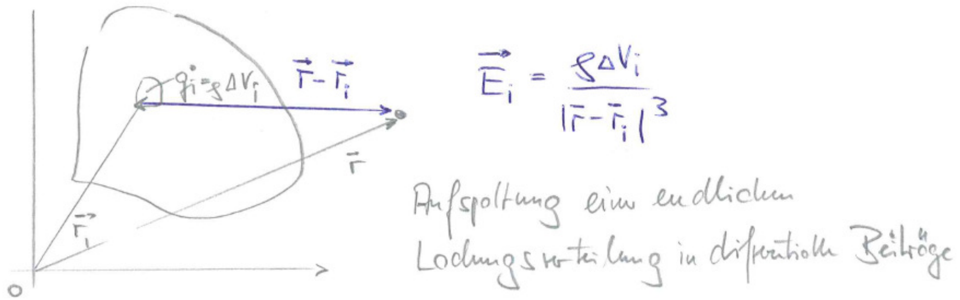
➢ Potenzial einer Ladungsverteilung:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \int_B d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

➢ Coulombkraft:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\,\epsilon_o} \sum_i^N q_i\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} & \text{Punktladungen} \\ \frac{q}{4\pi\,\epsilon_o} \int dq'\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} & \text{Ladungsverteilung} \end{cases}$$

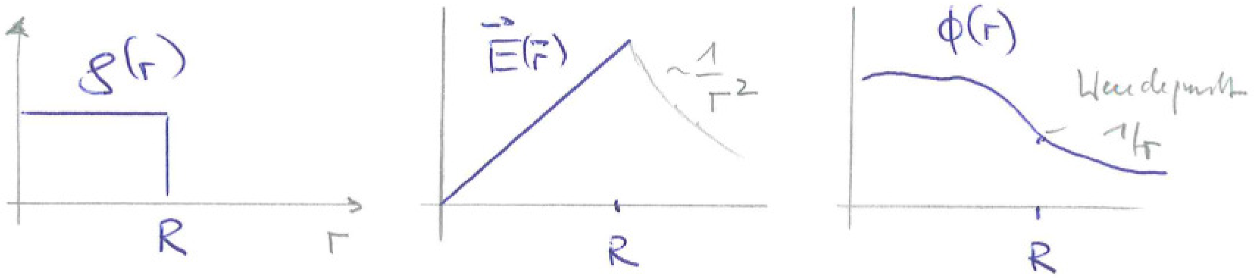
➢ Kraftdichte einer Ladungsverteilung: $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta V} = \frac{\Delta q}{\Delta V}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r})\,.$



2.2.c. Elektrisches Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Homogenen geladenen Kugel:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const.} & (r \le R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} = \ldots$$



homogen geladene Kugel

Lösungswege:

- Anwendung des Gaußschen Satzes: $\int_B d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \;=\; \frac{Q}{\epsilon_o}\,.$
- Lösung der Potenzialgleichung: $\Delta\,\Phi \;=\; -\mathrm{div}\,\mathbf{E} \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon_o}\,.$
- Berechnung des Integrals zu $\Phi(\mathbf{r})$.
- Potenzialtheorie: Symmetrien der Ladungsverteilung sowie Stetigkeitsbedingungen betrachten

Beispiel (Verwendung des Gaußschen Satzes): Wir verwenden Kugelkoordinaten und sehen aufgrund der Symmetrie der Ladungsverteilung, dass auch $\Phi = \Phi(r) \neq \Phi(\vartheta, \varphi)$ kugelsymmetrisch sein wird.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\,\Phi(r) = -\Phi'(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r} = +E(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,.$$

$$\int_{\partial B} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}(r) = 4\pi\,r^2\,E(r) = \frac{4\pi}{\epsilon_o}\int_0^r dr'\,r'^2\,\rho(r') = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_o}\frac{r^3}{R^3} & (r \leq R) \\ \frac{Q}{\epsilon_o} & (r > R) \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o}\frac{Q\,r}{R^3} \\ \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o}\frac{Q}{r^2} \end{cases}; \qquad \Phi(r) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o}\begin{cases} \frac{Q}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) & (r \leq R) \\ \frac{Q}{r} & (r > R) \end{cases}, \qquad \text{stetig bei } r = R;\ \Phi(\infty) = 0$$

Tafelbeispiel (Verwendung des Poisson-Gleichung): Da $\Phi = \Phi(r) \neq \Phi(\vartheta, \varphi)$, vereinfacht sich die Possion-Gleichung zu einer gDgl. ... allerdings mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\Delta\,\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\Phi) + \frac{1}{r^2\,\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\Phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

Im Inneren und Äußeren der geladenen Kugel getrennt betrachtet $\rightsquigarrow$ formalen Lösungen (einsetzen !)

$$(r^2\,\Phi'(r))' = 0 \qquad \Phi(r) = -\tfrac{c_1}{r} + c_2 \qquad r > R$$

$$(r^2\,\Phi'(r))' = -4\pi\,\rho_o\,r^2 \qquad \Phi(r) = -\tfrac{1}{6\,\epsilon_o}\,\rho_o\,r^2 - \tfrac{c_3}{r} + c_4 \qquad r \leq R$$

Die korrekte Lösung folgt aus:

- Randbedingung $\Phi(\infty) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad c_2 \;=\; 0\,;$
- keine Punktladung bei $r = 0 \quad\Longrightarrow\quad c_3 \;=\; 0\,;$
- Stetigkeit von Φ und Φ' bei $r \;=\; R \quad\Longrightarrow\quad c_1 \;=\; -Q\,,\; c_4 \;=\; \frac{3Q}{8\pi\,\epsilon_o\,R}\,.$

2.2.d. Multipolentwicklungen des Fernfeldes

Gesucht: $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ fern von einer lokalisierten Ladungsverteilung $\Longrightarrow$ gute Näherungsformel (Multipolfeld)

➢ **Näherungsformel:**

➢ Wir betrachten Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$; $\quad \rho(r > R) \;=\; 0$

➢ Fernfeld: alle Orte $\mathbf{r}$, für die $r'/r \;\ll\; 1$ gilt mit $r' \;\leq\; R\,.$

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 \;=\; r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}} \;=\; \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}}$$

➢ Reihenentwicklung $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\,x^2 \ldots$ für $x \;=\; \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}$ ... daraus folgt dann:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{3}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - \frac{1}{2}\,\frac{r'^2}{r^2}\right) + \ldots\right] \;=\; \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}') + \frac{1}{2\,r^5}\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - \mathbf{r}'^2\right] + \ldots$$

➢ Multipolentwicklung des elektrostatischen Potenzials im Fernfeldes

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \int_B d^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; \sum_k \Phi^{(k)} \;=\; \Phi^{(1)} \,+\, \Phi^{(2)} \,+\, \Phi^{(3)} \,+\, ...$$

Monopol – Potenzial $(k = 1)$
Dipol – Potenzial $(k = 2)$
Quadrupol – Potenzial $(k = 3)$

Terme geordnet nach Potenzen $\Phi^{(k)} \propto 1/r^k$ bzw. $r'^{(k-1)}$

2.3. Energie des elektrostatischen Feldes

Energie des elektrostatischen Feldes: ... beim Trennen oder Zusammenbringen zweier Ladungen

Da $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r})$ ... Gradientenfeld $\Longrightarrow$ Arbeit ist wegunabhängig, um q von $\mathbf{r}_1$ nach $\mathbf{r}_2$ zu bewegen:

$$W_{12} \;=\; -\int_1^2 d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{q}{4\pi\epsilon_o}\int_1^2 d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\,\left(\Phi(\mathbf{r}_2) \,-\, \Phi(\mathbf{r}_1)\right)$$

Potenzialdifferenz = Spannung

Die Arbeit ist gleich dem Produkt aus Ladung mal Spannung: $W \;=\; \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\,\Delta\Phi\,.$

2.3.a. Potenzielle Energie einer Ladung q im externen Feld

➢ Potenzielle Energie einer Ladung q im externen Feld: $W_{\mathrm{pot}}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\,\Phi(\mathbf{r})$ im externen elektrostatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{E}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\,.$

➢ Ladungen werden in Richtung der Feldlinien beschleunigt: $\mathbf{E} \;=\; -\mathrm{grad}\,\Phi\,.$

➢ Verschiebung einer Ladung entlang einer Äquipotenzialfläche bedarf keiner Arbeit.

➢ Verallgemeinerung: $W_{\text{pot}} \;=\; \int d^3\mathbf{r}\; \rho(\mathbf{r})\; \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ ... für externes Potential

2.3.b. Energie einer stetigen Ladungsverteilung im eigenen Feld

➢ Energie einer stetigen Ladungsverteilung im eigenen Feld: Potenzielle (elektrostatische) Energie: ... N Punktladungen an Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$

$$W_{\text{pot}}^{(N)}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q_N}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_N|} \qquad \text{... Energie von } q_N \text{ aufgrund der anderen Ladungen;} \quad \mathbf{r}_N \to \infty$$

$$= \text{notwendige Arbeit, um } q_N \text{ vom Unendlichen nach } \mathbf{r}_N \text{ zu verschieben}$$

➢ Elektrostatische Energie für N Ladungen:

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} W_{\text{pot}}^{(i)} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{j<i}^{N} \frac{q_i\, q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \;=\; \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i\, q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \qquad \text{fuer } N \text{ Ladungen}$$

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \int d^3r \int d^3r' \; \frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \;=\; \frac{1}{2} \int d^3r\; \rho(\mathbf{r})\; \Phi(\mathbf{r}) \qquad \text{fuer Ladungsverteilung } \rho(r)$$

$\Phi(\mathbf{r})$ ist das durch (kontinuierliches) $\rho(\mathbf{r})$ hervorgerufene Potential; Faktor 1/2 !

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{1}{2} \int d^3r\; \rho(\mathbf{r})\, \Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\epsilon_o}{2} \int d^3r\; \Phi(\mathbf{r})\, \Delta\, \Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\epsilon_o}{2} \int d^3r\;\; \text{div}\,(\Phi\, \text{grad}\, \Phi) \;+\; \frac{\epsilon_o}{2} \int d^3r\;\; \text{grad}\, |\Phi(\mathbf{r})|^2 \\ &=\; -\frac{\epsilon_o}{2} \int_{\partial B} d\mathbf{a} \cdot\; (\Phi\, \text{grad}\, \Phi(\mathbf{r})) \;+\; \frac{\epsilon_o}{2} \int d^3r\; |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \;=\; \frac{\epsilon_o}{2} \int d^3r\; |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \;=\; \int d^3r\; w(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

➢ Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \qquad\qquad \text{Energiedichte in der Elektrostatik}$$

Beispiel (Elektrostatische Energie einer homogen geladenen Kugel): Das elektrische Feld der homogen geladenen Kugel liefert Energiedichte und Gesamtenergie

$$E(r) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\begin{cases}\frac{Q\,r}{R^3}\\ \frac{Q}{r^2}\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad w(r) \;=\; \frac{\epsilon_o}{2}\,|\mathbf{E}(r)|^2 \;=\; \frac{1}{32\pi^2\epsilon_o}\begin{cases}\frac{Q^2\,r^2}{R^6} & (r \le R)\\ \frac{Q^2}{r^4} & (r > R)\end{cases}$$

$$W \;=\; 4\pi\int_0^\infty dr\,r^2\,w(r) \;=\; \frac{3\,\epsilon_o}{20\pi}\,\frac{Q^2}{R} \qquad\qquad \text{... divergiert fuer Punktladung :} \quad R \;\rightarrow\; 0$$

Eine Punktladung ist ein nützliches Modell, wenn die (endliche) Größe der Ladungsverteilung unwichtig ist; strenggenommen führt sie jedoch zu Divergenzen und ist daher unrealistisch (unphysikalisch).

Beispiel ("Klassischer Elektronenradius"): folgt aus elektrostatischer Energie = Ruhemasse zu

$$W \;=\; m_e\,c^2 \;=\; \frac{3\,\epsilon_o}{20\pi}\,\frac{e^2}{R_e} \qquad \Longrightarrow \qquad R_e \;=\; \frac{3\,\epsilon_o}{20\pi}\,\frac{e^2}{m_e\,c^2} \;\approx\; 1.7\,\text{fm} \;=\; 1.7\cdot 10^{-15}\,m$$

2.4. Elektrostatische Felder in Materie

2.5. Aufgaben

Siehe Übungen.

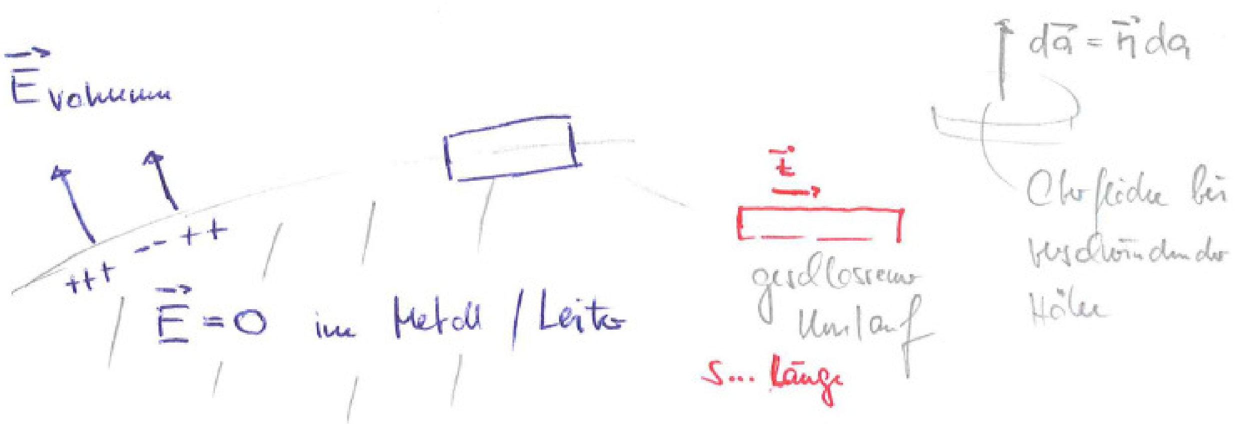
3. Randwertprobleme der Elektrostatik (ES)

Gesucht: Elektrostatisches Potenzial $\Phi(\mathbf{r})$ oder elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ innerhalb eines Bereiches B für gegebene Ladungsverteilungen und gegebene Potenziale auf den Randflächen bzw. deren Ableitungen.

3.1. Ideale Leiter im es Feld. Randbedingungen

- Oberflächenladungen auf Metallen:
- ES Potenzial in Metallen: Für Metalle $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ auf Oberfläche, sonst wirken Kräfte auf bewegliche Ladungen ... und daher

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.} \qquad \text{(in Metallen)}$$



elektrische Feldkomponenten im Grenzbereich Metall – Vakuum

Randbedingungen für elektrostatische Felder an Metalloberflächen:

➢ Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes verschwindet am Rand ∂B

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{\,\mathrm{Vakuum}}(\mathbf{r})\,|_{\,\partial B} \;=\; 0 \qquad\qquad \mathbf{t} \ldots \text{Tangentialvektor}$$

➢ Normalkomponente des elektrischen Feldes ist gleich der Ladungsdichte (über ϵ_o) an der dortigen Oberfläche.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\,\mathrm{Vakuum}}(\mathbf{r})\,|_{\,\partial B} \;=\; -\frac{\partial \Phi}{\partial n}\,|_{\,\partial B} \;=\; \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_o} \qquad\qquad \sigma(\mathbf{r}) \qquad \text{Ladungsdichte auf Oberflaeche}$$

3.2. Randwertprobleme. Eindeutigkeit der Lösungen

3.2.a. Einschub: Harmonische Funktionen in der Potenzialtheorie

Harmonische Funktionen werden alle die Lösungen der Laplace-Gleichung genannt, die stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzen. Für alle harmonischen Funktionen ist das Integral der Richtungsableitung dieser Funktionen über eine geschlossene Oberfläche stets gleich null.

3.2.b. Klassifizierung der Randwertproblemene

Allgemein werden drei Klassen von Randwertproblemen unterschieden in Abhängigkeit ob die Potenziale und/oder die Ladungsdichten (Richtungsableitung des Potentials) auf den Randflächen bekannt sind.

Randwertaufgaben der Elektrostatik: Für gegebene Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$ und Randbedingungen wird das Potenzial $\Phi(\mathbf{r})$ gesucht:

B ... Bereich, ∂B ... stetiger oder stückweise stetiger Rand des Bereiches B

$$\begin{aligned}
\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o} && \text{in } B \\
\Phi(\mathbf{r}) &= \Phi_0 && \text{auf } \partial B \qquad (\text{Dirichlet} - \text{Problem}) \qquad \text{und/oder} \\
\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n} &= -\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_o} && \text{auf } \partial B \qquad (\text{Neumann} - \text{Problem})\,.
\end{aligned}$$

Das Dirichlet- und das Neumann-Problem kann für verschiedene Randflächen natürlich auch kombiniert werden. Im Vakuum wird ferner allgemein $\Phi(|\mathbf{r}| \to \infty) = 0$ gefordert.

- Homogene und partikuläre Lösungen: allgemeine Lsg. = homogenen + partikuläre Lsg.
- Allgemeine Lösung für ES Potenzial:

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = \Phi_h(\mathbf{r}) + \Phi_p(\mathbf{r}) = \underbrace{\Phi_h(\mathbf{r})} + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_B d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Freiheit nutzen, um RB zu erfüllen

wobei die homogene Lösung die Laplace-Gleichung $\Delta\,\Phi_h(\mathbf{r}) = 0$ erfüllt.

3.2.c. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

- Existenz der Lösungen: Mathematik (Existenzsätze)
- $\Phi_1(\mathbf{r})$, $\Phi_2(\mathbf{r})$ ... zwei beliebige Lösungen, dann $\Psi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})$

$$\Delta\,\Psi = 0; \qquad \Psi|_{\partial B} = 0; \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\partial B} = 0$$

- $$\int_B d^3r\,(\Psi \underbrace{\Delta\,\Psi}_{=0} + \nabla\,\Psi\cdot\nabla\,\Psi) = \oint_{\partial B} da\,\Psi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n} \equiv 0$$

  aus : $\Delta\,\Psi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int_B d^3r\,(\nabla\,\Psi)^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\,\Psi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \Psi(\mathbf{r}) = \text{const.}$

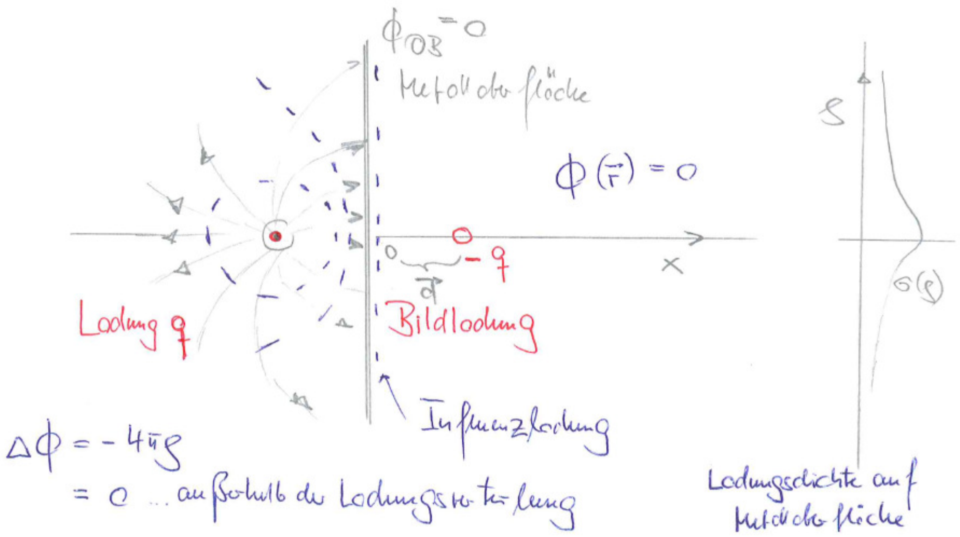
D.h.: Lösungen $\Phi_1(\mathbf{r})$ und $\Phi_2(\mathbf{r})$ können sich nur um eine Konstante unterscheiden; die Lösungen sind daher eindeutig für das Dirichlet-Problem und eindeutig (bis auf eine unwesentliche Konstante) für das Neumann-Problem.

Beispiel (Faraday-Käfig): ... geschlossene, wenngleich beliebige Metalloberfläche ohne Ladungen im Inneren

$$\Delta\,\Phi \;=\; 0 \quad \text{in } B \quad \text{und} \quad \Phi\,|_{\partial B} \;=\; \Phi_0 \;=\; \text{const.} \quad\Longrightarrow\quad \Phi(\mathbf{r}) \;=\; \Phi_0 \;=\; \text{const.} \quad \text{in } B \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \;\equiv\; 0$$

innerhalb des Käfigs; ein geschlossener Metallkäfig schirmt beliebige äußere Felder ab.

3.3. Methode der Spiegelladungen



Ziel der Spiegelladungsmethode: homogenen Lösungen gedachter Bildladungen so hinzuzuaddieren, daß RB erfüllt.

Beispiel (Punktladung vor geerdeter Metallfläche bei $x = 0$):

- Betrachten Punktladung q vor ebener Metallplatte bei $x = 0$, die den Raum in zwei Hälften teilt; $x < 0$ und $x > 0$.
- Lösung für $x < 0$?

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{q}{\epsilon_o}\,\delta(\mathbf{r}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{d} \;=\; d\,\mathbf{e}_x, \qquad\qquad \Phi\,|_{x=0} \;=\; \Phi(x=0,\,y,\,z) \;=\; 0$$

- Modellsystem: der Ladung q bei $-\mathbf{d}$ liegt eine entgegengesetzte Bild/Spiegel-Ladung $-q$ bei $\mathbf{d}$ gegenüber

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{q}{\epsilon_o}\,\left(\delta(\mathbf{r}+\mathbf{d}) \;-\; \delta(\mathbf{r}-\mathbf{d})\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|} \;-\; \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}\right)$$

- Gesamte Lösung:

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \begin{cases} \Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{4\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|} \;-\; \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}\right) & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; -\mathrm{grad}\,\Phi \;=\; \begin{cases} \frac{q}{4\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{\mathbf{r}+\mathbf{d}}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}|^3} \;-\; \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3}\right) \\ 0 \end{cases}$$

- auch auf andere (symmetrische) Geometrien anwendbar; mehrere Spiegelladungen sowie Spiegelladungen q_s mit verschiedener Stärke und Vorzeichen

➢ Influenzladung auf der Oberfläche:

➢ Mit $\sigma(\mathbf{r}) = -\epsilon_o \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_{x=0}$ ergibt sich auf der Oberfläche $x = 0$ mit obigen $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ -Feld:

$$\sigma(y,z) = -\epsilon_o E_x(x=0,\, y,z) = -\frac{q}{4\pi}\frac{d+d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-q\,d}{2\pi\,(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-q\,d}{2\pi\,(d^2+r^2)^{3/2}}$$

in Zylinderkoordinaten (r,φ,z)

➢ Induzierte Influenzladung auf gesamter Oberfläche

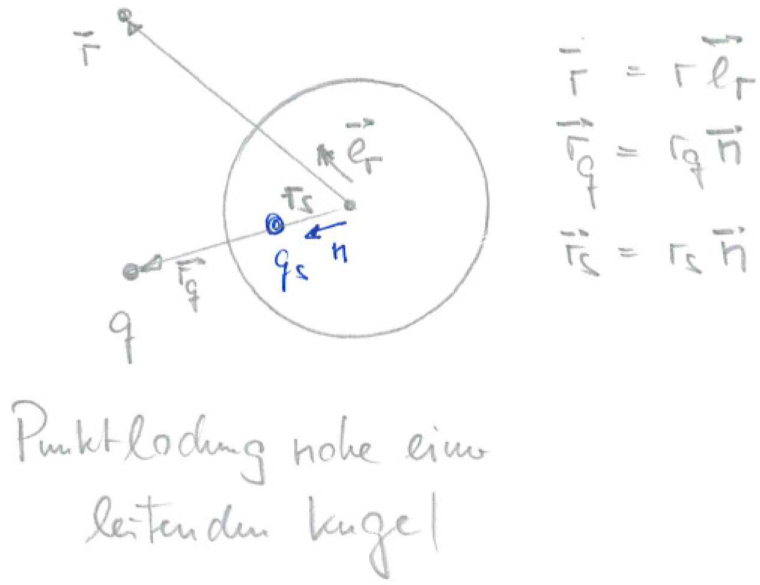
$$q_{\,\mathrm{ind}} = 2\pi\int_0^\infty dr\,r\,\sigma(r) = -\,q\,d\int_0^\infty dr\,\frac{r}{(d^2+r^2)^{3/2}} = -\,q$$

Diese induzierte (Oberflächen-) Ladung wird durch Kräfte des Feldes in Raumbereich $x < 0$ auf die freien Ladungsträger im Metall hervorgerufen.

➢ **Punktladung nahe einer leitenden und geerdeten Kugel:**

➢ Betrachten Punktladung q am Ort $\mathbf{r}_q$ außerhalb einer um den Ursprung zentrierten leitenden und geerdeten Kugel

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_o}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q), \qquad \Phi(r=R,\,\vartheta,\varphi) = 0$$



➢ Modellsystem: Ladung q und Spiegelladung q_s ??

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r, \qquad \mathbf{r}_q = r_q\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{r}_s = r_s\,\mathbf{n}$$

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_o}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q) + \frac{q_s}{\epsilon_o}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|} + \frac{q_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{q}{|r\,\mathbf{e}_r - r_q\,\mathbf{n}|} + \frac{q_s}{|r\,\mathbf{e}_r - r_s\,\mathbf{n}|}\right)$$

$$\Phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{q}{R\,|\mathbf{e}_r - \frac{r_q}{R}\,\mathbf{n}|} + \frac{q_s}{r_s\,|\mathbf{n} - \frac{R}{r_s}\,\mathbf{e}_r|}\right) = 0 \qquad \text{RB}$$

➢ Die Randbedingung ist offenbar erfüllt, falls ... Loesung

$$\frac{q}{R} = \frac{-q_s}{r_s} \quad \text{und} \quad \frac{r_q}{R} = \frac{R}{r_s} \quad \Longrightarrow \quad r_s = \frac{R^2}{r_q} \quad \Longrightarrow \quad q_s = -q\,\frac{r_s}{R} = -q\,\frac{R}{r_q} = \kappa\, q \qquad \kappa = -\frac{R}{r_q}$$

3.4. Inversionsmethode

Ziel: geeignete Skalierung von bereits bekannten Lösungen, um geg. RB zu erfüllen.

➢ Potential von N Punktladungen: N Ladungen q_1, ..., q_N an den Orten $\mathbf{r}_1$, ..., $\mathbf{r}_N$, dann bekanntes Potenzial am Orte $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i^N \frac{q_i}{\sqrt{r^2 + {r_i}^2 - 2\,r r_i\,(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{r_i})}}$$

➢ Dann bspw. auch Lösung für die N (neuen) Ladungen $\tilde{q}_1$, ..., $\tilde{q}_N$ an den Orten $\tilde{\mathbf{r}}_1$ ..., $\tilde{\mathbf{r}}_N$

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{a}{r}\,\Phi\left(\frac{a^2}{r}, \vartheta, \varphi\right)$$

$$\tilde{q}_1 = \frac{a\,q_1}{r_1}, \quad ..., \quad \tilde{q}_N = \frac{a\,q_N}{r_N} \qquad\qquad \tilde{\mathbf{r}}_1 = (a^2/r_1, \vartheta_1, \varphi_1), \quad ..., \quad \tilde{\mathbf{r}}_N = (a^2/r_N, \vartheta_N, \varphi_N)\,.$$

Beispiel (erneut Punktladung vor leitender und geerdeter Kugel):

➢ Betrachten Ladung q am Ort $\mathbf{r} = (r_q, 0, 0)$ in Kugelkoordinaten (d.h. auf der x-Achse) und außerhalb einer leitenden Kugel mit Radius R.

Gesucht ist erneut das Potenzial im Außenraum der Kugel mit $\Phi_g(R) = 0$??

➢ Punktladung q erzeugt an einem beliebigen (Außen-) Punkt das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \Phi(r,\vartheta,\varphi) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{\sqrt{r^2 \,+\, {r_q}^2 \,-\, 2rr_q\,(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_n)}}$$

➢ Eine zweite Ladung $\tilde{q} \;=\; -\frac{Rq}{\tilde{r}}$ mit $\tilde{r} \;=\; \frac{R^2}{r_q}$ erzeugt gemäß obiger Skalierungsformel das Potential

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{R}{r}\,\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right) \;=\; -\,\Phi(R,\vartheta,\varphi) \qquad\qquad \text{fuer} \quad r = R$$

➢ Daher Randbedingung auf Kugeloberfläche $r \;=\; R$ offenbar erfüllt

$$\Phi(R,\vartheta,\varphi) \;+\; \tilde{\Phi}(R,\vartheta,\varphi) \;=\; 0$$

und Gesamtpotential sowie elektrostatisches Feld im Außenraum der Kugel

$$\Phi_g(r,\vartheta,\varphi) \;=\; \Phi(r,\vartheta,\varphi) \;+\; \tilde{\Phi}(r,\vartheta,\varphi) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{q}{|\mathbf{r}\,-\,\mathbf{r}_q|} \;-\; \frac{R}{r}\,\frac{q}{\sqrt{\frac{R^4}{r^2} \,+\, \frac{R^4}{r_q^2} \,-\, 2R^2\,rr_q\,(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_n)}}\right]$$

$$\mathbf{E}(r,\vartheta,\varphi) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left[\frac{q(\mathbf{r}\,-\,\mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}\,-\,\mathbf{r}_q|^3} \;+\; \mathrm{grad}_{\mathbf{r}}\left(\frac{R}{r}\,\frac{q}{\sqrt{\frac{R^4}{r^2} \,+\, \frac{R^4}{r_q^2} \,-\, 2R^2\,rr_q\,(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_n)}}\right)\right]$$

3.5. Methode der Greenschen Funktionen

Ziel: Gesamtlösung = Superposition der (bekannten) Lösung für alle Punktquellen in B .

Greensche Funktion des vereinfachten Dirichlet-Problems mit $\Phi(\mathbf{r})|_{\partial B} = 0$

➢ Gesucht seien Lösungen zu

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o} \quad \text{in } B \qquad \text{und} \qquad \Phi(\mathbf{r})\,|_{\partial B} \;=\; 0\;.$$

➢ Bekannt sei Lösung zu einer Punktladung mit $(q \equiv 1)$

$$\Delta\,G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; -\frac{1}{\epsilon_o}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \text{in } B \qquad \text{und} \qquad G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,|_{\,\mathbf{r}\in\partial B} \;=\; 0\;.$$

Greensche Funktion

➢ Diese Lösung $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ erlaubt die Darstellung der allgemeinen Lösung

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int_B d^3r'\,G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}')\;. \qquad\qquad \text{denn :}$$

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int_B d^3r'\,\Delta\,G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}') \;=\; -\frac{1}{\epsilon_0}\int_B d^3r'\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\rho(\mathbf{r}') \;=\; -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o}\;.$$

Allgemein ist die (konkrete Form der) Greenschen Funktion abhängig auch von der Form der Randbedingungen; auf den Leitern bzw. Randflächen können bspw. sowohl nichtverschwindende Potenzialwerte (Dirichlet-Problem) als auch Oberflächenladungsdichten (Neumann-Problem) gegeben sein, d.h. die Normalkomponenten des $\mathbf{E}$-Feldes auf den entsprechenden Oberflächen.

Greensche Funktion für allgemeine RB:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;+\; G_h(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,; \qquad\qquad \Delta\,G_h(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; 0 \qquad\qquad \text{harmonische, symmetrische Fkt.}$$

Summe aus der Greenschen Funktion einer Punktladung im freien Raum sowie von $G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Mit Hilfe der 2. Greenschen Formel für $\Gamma = (\Phi(\mathbf{r}')\,\mathrm{grad}_{\mathbf{r}'}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$ kann das Potenzial am Ort $\mathbf{r}$ durch die Ladungsverteilung innerhalb von B sowie die Potentialwerte auf ∂B dargestellt werden

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \int_B d^3r'\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \rho(\mathbf{r}') \;-\; \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B} da' \left(\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}\, \Phi(\mathbf{r}') \;-\; G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right) . \tag{3.1}$$

➢ **Greensche Funktion des allgemeinen Dirichlet-Problems mit $\Phi(\mathbf{r})|_{\partial B} = \Phi_0$:**

➢ Gesucht seien Lösungen zu

$$\Delta\, \Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o} \quad \text{in } B \qquad \text{und} \qquad \Phi(\mathbf{r})\,|_{\partial B} \;=\; \Phi_0 \,.$$

➢ Ladungsverteilung im Vakuum: Falls keine Metall- oder Randflächen gegeben sind, ist die Lösung von

$$\Delta\, G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \;=\; -\frac{1}{\epsilon_o}\, \delta(\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}') \qquad \text{und} \qquad \Phi(\infty) \;=\; 0$$

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}'|}\,; \qquad\qquad G_D(\infty, \mathbf{r}') \;=\; 0$$

Beispiel (Ladungsverteilung vor geerdeter Metallplatte bei $x = 0$):

➢ Für eine geerdete Metallplatte bei $x = 0$ ist die Randbedingung $\Phi(x \geq 0) \;=\; 0$. Dann ist Lösung von

$$
\begin{aligned}
\Delta\, G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \;&=\; -\frac{1}{\epsilon_o}\,\delta(\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}') \qquad \text{und} \qquad \Phi(x \geq 0, y, z,) \;=\; 0 \\
G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \;&=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}'|} \,-\, \frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}_s|}\right) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}'|} \,-\, \frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}' \,+\, 2(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_x)\,\mathbf{e}_x|}\right) \\
G_D(x = 0, \mathbf{r}') \;&=\; 0
\end{aligned}
$$

gerade die Lösung einer Punktladung vor einer Metallfläche mit $\mathbf{r}_s \;=\; \mathbf{r}' \,-\, 2(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_x)\,\mathbf{e}_x$ (Position der Spiegel- bzw. Bildladung).

➢ Damit ist das Potential einer Ladungsverteilung in linken Teilraum vor Metallfläche bei $x = 0$ gegeben durch

$$
\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_B d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}'|} \,-\, \frac{1}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}' + 2(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_x)\,\mathbf{e}_x|}\right)
$$

falls die Integration $\int_B d^3r'$ nur über die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ im linken Teilraum $(x < 0)$ läuft oder

$$
\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_B d^3r'\left(\frac{\rho(\mathbf{r}') \;+\; \rho_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} \,-\, \mathbf{r}'|}\right)
$$

falls die Integration $\int_B d^3r'$ über die (eigentliche) Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ im linken Teilraum $(x < 0)$ <u>und</u> eine Spiegelladungsverteilung $\rho_s(\mathbf{r})$ im rechten Teilraum $(x > 0)$ läuft.

Die Spiegelladungsverteilung $\rho_s(\mathbf{r})$ ist die an $x = 0$ gespiegelte Verteilung mit negativen Vorzeichen.

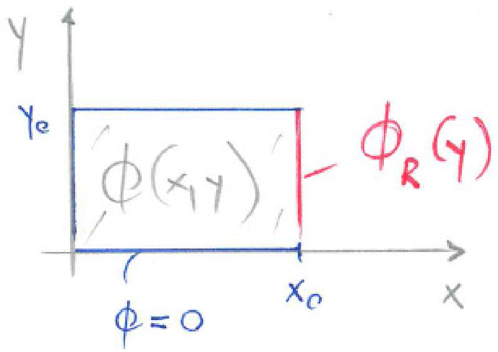
3.6. Methode der Trennung der Variablen

Ziel: Trennung der Variablen mit einem Separationsanssatz

$$\Phi(\mathbf{r}) \;=\; X(x)\,Y(y)\,Z(z) \qquad \text{oder} \qquad \Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{R(r)}{r}\,P(\vartheta)\,S(\varphi) \qquad \text{oder} \qquad \ldots$$

➢ **Ebenes Potential in Rechteckrahmen:**

➢ Gegeben: (2-dim) ebener Rahmen mit folgenden Potenzialen (siehe Bild)



$$\Phi(x=0,y) \;=\; \Phi(x,y=0) \;=\; \Phi(x,y=y_0) \;=\; 0$$
$$\Phi(x_0,y) \;=\; \Phi_R(y)$$

➢ Lösung von $\Delta\,\Phi \;=\; 0$ innerhalb des Rahmens: ... $\Phi \;=\; X(x)\,Y(y)$ probieren

$$\Delta\,\Phi(x,y) \;=\; \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(x,y) \;=\; Y\,\frac{\partial^2\,X(x)}{\partial x^2} \,+\, X\,\frac{\partial^2\,Y(y)}{\partial y^2} \;=\; 0$$

$$\frac{1}{X}\,\frac{\partial^2\,X(x)}{\partial x^2} \;=\; -\frac{1}{Y}\,\frac{\partial^2\,Y(y)}{\partial y^2} \;=\; \lambda^2 \qquad \text{const.}$$

➢ Diese gDgl. haben die allgemeinen Lösungen:

$$\frac{\partial^2\,X(x)}{\partial x^2} \,-\, \lambda^2\,X(x) \;=\; 0\,, \qquad \frac{\partial^2\,Y(y)}{\partial y^2} \,+\, \lambda^2\,Y(y) \;=\; 0$$

$$X(x) \;=\; a\,e^{\lambda\,x} \,+\, b\,e^{-\lambda\,x}\,, \qquad Y(y) \;=\; c\,\sin(\lambda\,y) \,+\, d\,\cos(\lambda\,y)\,.$$

Bestimmung der Integrationskonstanten a, b, c, d, so dass RB erfüllt werden.

$\rightsquigarrow \quad d = 0, \quad a = -b, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{y_0}$

➢ Vollständige Lösung als Reihenentwicklung: ... nach längerer Rechnung

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{y_0}\, y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{y_0}\, x\right) \left[\frac{2}{y_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{y_0}\, x_0\right)} \int_0^{y_0} dy\, \sin\left(\frac{n\pi}{y_0}\, y\right) \Phi_R(y)\right].$$

3.7. Methoden der Funktionentheorie

Idee: Für ein 2-dim Potentialproblem fassen wir die Koordinaten (x, y) bzw. (r, φ) zu eine komplexen Koordinate $z = x + i\, y$ zusammen. Dies führt uns zu komplexen Funktionen, die weitere Lösungsmethoden zulassen.

➢ **Dirichlet-Problem in zwei Dimensionen:**

➢ Gesucht: $\Phi(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{zwischen den Leitern}$$

$$\Phi|_{\partial B} = \Phi_i = \text{const.} \qquad \text{auf den Leitern } i = 1, ..., N\,.$$

➢ Analytische Funktionen: ... Eine in der komplexen Ebene definierte Funktion $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ heißt analytisch, d.h. komplex differenzierbar, wenn $u(x, y)$ und $v(x, y)$ die Cauchy-Riemannschen Dgl. erfüllen.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \qquad \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$$

➢ Sowohl Realteil $u(x, y)$ als auch Imaginärteil $v(x, y)$ erfüllen unabhängig die Potentialgleichung und beschreiben daher eine gültige Feldkonfiguation im freien Raum (allerdings für zunächst unbekannte Randbedingungen).

➢ Sowohl $u(x, y)$ als auch $v(x, y)$ können daher als Potenziale $\Phi(x, y)$ aufgefaßt werden.

Beispiel (Feld eines geladenen Kreiszylinders): Betrachten die analytische Funktion

$$f(z) \;=\; \ln z \;=\; \ln(r\, e^{i\varphi}) \;=\; \ln r \,+\, i\varphi\,.$$

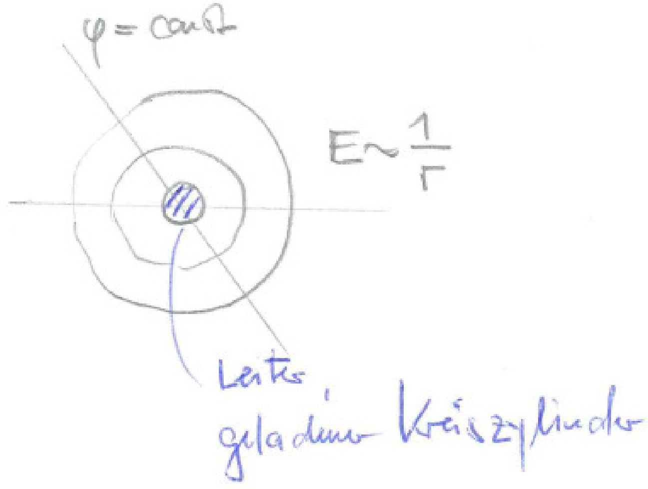
Dann offenbar $u \;=\; \ln r$ und $v \;=\; \varphi\,.$

Das Potenzial $\Phi \;=\; \ln r$ hat als Äquipotenzialflächen gerade Kreise konstanten Abstandes und das elektrische Feld

$$\mathbf{E} \;=\; -\mathrm{grad}\,\Phi \;=\; \frac{\mathbf{e}_r}{|r]}\;,$$

d.h. die Feldlinien verlaufen entlang $\varphi \;=\;$ const.

Dies ist das Feld eines geladenen Kreiszylinders bzw. eines Drahtes entlang der z-Achse. Eine geeignete Skalierung der Funktion $f(z)$ erlaubt es, die Randbedingung auf der Oberfläche des Drahtes zu erfüllen.



3.8. Numerische Methoden

Während noch vor wenigen Jahrzehnten die analytische Potenzialtheorie eine sehr wichtige Rolle im Studium der Physiker und Elektroingenieure spielte, stehen heute zur Lösung der statischen Maxwell-Gleichungen (und teilweise sogar für zeitabhängige Probleme) leistungsfähige Computercodes zur Verfügung. Darin werden die Felder auf einem Gitter oder einer Basis für gegebenen Randbedingungen gelöst; diese Ansätze werden vor allem in der Optik sehr häufig verwendet.

Die besprochenen analytischen Methoden sind trotzdem in vielen Bereichen der theoretischen Physik wichtig, wie bspw. in derQFT, Hydrodynamik und Magnetohydrodynamik, Optik und photonischen Kristallen.

3.9. Kondensatoren und Kapazitäten

Gesucht:

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in B (ausser B_i) ... in Zwischenraeumen

$\Phi(\mathbf{r})$ –″ –

W_{pot} ... in gesamter Anordnung; gespeicherte Energie (Ladung, Anordnung, Material)

- **Kondensatoren als Randwertproblem:**
- Anordnung mit vorgegebene Geometrie: ... **E**-Feld durch $\Phi_1, ..., \Phi_N$ eindeutig bestimmt

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Phi|_{\partial B_i} = \Phi_i, \quad i = 1, ..., N, \qquad \Phi(\infty) = 0$$

- Gesamtpotenzial:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_i\, \varphi_i(\mathbf{r})\,; \qquad \varphi_i(\mathbf{r})|_{\partial B_j} = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \Delta\,\varphi_i(\mathbf{r}) = 0$$

- $\Phi(\mathbf{r})$ sei Lösung, dann auch $\alpha\,\Phi(\mathbf{r})$ Lösung, falls

$$\Phi(\mathbf{r}) \to \alpha\,\Phi(\mathbf{r}) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \Phi_i \to \alpha\,\Phi_i \\ \mathbf{E} \to \alpha\,\mathbf{E} \\ \sigma_i(\mathbf{r}) \to \alpha\,\sigma_i(\mathbf{r}) \\ Q_i \to \alpha\,Q_i \end{cases}$$

➢ Lineare Beziehung zwischen Ladungen und Potenzialwerten auf den Leitern:

$$Q_i \;=\; \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\,\Phi_j \qquad \Longrightarrow \qquad C_{ij} \;=\; -\epsilon_o \oint_{\partial B_i} da\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}\Big|_{\text{aussen}}$$

(Kapazitäts-) Matrix C_{ij} hängt nur von der Geometrie (Dielektrika) ab

Elektrostatische Energie einer Kondensatoranordnung

➢ Umwerfen mittels 1. Greenscher Formel liefert

$$W_{\text{pot}} \;=\; \frac{\epsilon_o}{2}\int_B d^3r\,|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \;=\; -\frac{\epsilon_o}{2}\int_B d^3r\,\nabla\cdot(\Phi\,\nabla\,\Phi) \;=\; -\frac{\epsilon_o}{2}\sum_i \oint_{\partial B_i} da\,\Phi(\mathbf{r})\,\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{\text{aussen}}$$

$$=\; \frac{1}{2}\sum_i Q_i\,\Phi_i \;=\; \frac{1}{2}\sum_{ij}\Phi_i\,C_{ij}\,\Phi_j \;=\; \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{\Phi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{\Phi} \;=\; \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvektor bzgl. $\varphi_i(\mathbf{r})$

3.10. Aufgaben

Siehe Übungen.

4. Multipole des elektrostatischen Feldes: Spezielle Funktionen

4.1. Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

➢ Taylorentwicklung des Coulombpotentials für $r' \ll r$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2\, r^5} + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\left(3x_i x_j - r^2\, \delta_{ij}\right)\left(x_i' x_j' - \frac{r'^2}{3}\, \delta_{ij}\right)}{2\, r^5}$$

$$\begin{aligned} 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 &= \left(3x_i x_j - r^2\, \delta_{ij}\right)\left(x_i' x_j' - \frac{r'^2}{3}\, \delta_{ij}\right) = 3\, x_i x_j\, x_i' x_j' - r'^2\, \delta_{ij}\, x_i x_j - x_i' x_j'\, r^2\, \delta_{ij} + \frac{r'^2}{3}\, \delta_{ij}\, r^2\, \delta_{ij} \\ &= 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 \end{aligned}$$

➢ Potenzial und elektrisches Feld einer am Ursprung lokalisierten Ladungsverteilung; Fernfeld $r \gg r'$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_B d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3\, \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} - r^2\, \mathrm{tr}\, \mathbf{Q}}{2 r^5} + \ldots \right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q\, \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{r} - \mathbf{p}\, r^2}{r^5} + \ldots \right).$$

➢ Größen darin

$$q = \int_B d^3r'\,\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Ladung}$$

$$\mathbf{p} = \int_B d^3r'\,\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Dipolmoment}$$

$$Q_{ij} = \int_B d^3r' \left(x_i' x_j' - \frac{r'^2}{3}\,\delta_{ij}\right) \rho(\mathbf{r}') \qquad \text{Quadrupolmoment}$$

Quadrupolmoment: symmetrischer und spurloser Tensor zweiter Stufe

➢ $r \gg r'$: **E**-Feld bestimmt durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \begin{cases} \text{auf Ursprung zusammengezogene Ladung; Monopolterm} \\ \text{Dipolmoment } \mathbf{p} \quad \text{(Dipolterm, bei verschwindender Gesamtladung) ... falls } q = 0 \\ \text{Quadrupolmoment } \mathbf{Q} \quad \text{(Quadrupolterm) ... falls } q = \mathbf{p} = 0 \\ \text{usw.} \end{cases}$$

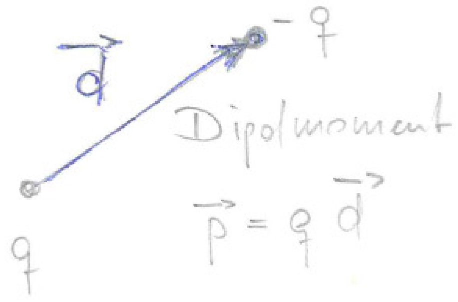
4.2. Elektrische Dipole und Quadrupole

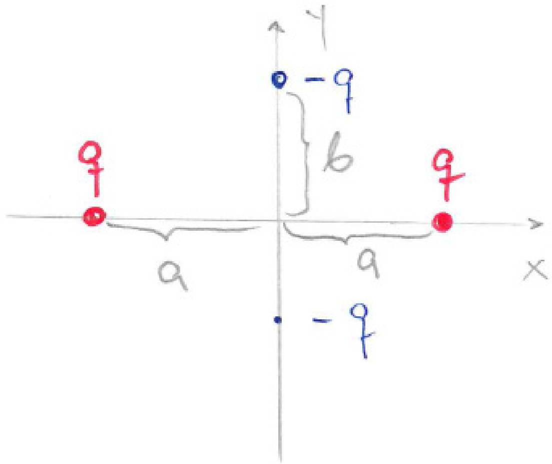
4.2.a. (Punktförmiger) elektrischer Dipol

➢ Ladungsverteilung und Potenzial eines (punktförmigen) Dipols: ... zwei Punktladungen $(q, -q)$ am Ort $\mathbf{r}_0$ im (kleinen) Abstand $\mathbf{d}$;
$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}) \approx \delta(\mathbf{r}) - \mathbf{d}\cdot\nabla\,\delta(\mathbf{r})$

$$\rho(\mathbf{r}) = -q\,(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-\mathbf{d}) - \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)) \approx \underbrace{q\,\mathbf{d}}_{\mathbf{p}}\cdot\nabla\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = -\mathbf{p}\cdot\nabla\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_B d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_B d^3r'\,\mathbf{p}\cdot\nabla\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}$$





4.2.b. Elektrischer Quadrupol

➢ Ladungsverteilung eines reinen elektrischen Quadrupolfeld: ... durch 4 symmetrisch angeordnete Punktladungen q darstellbar

$$\rho(\mathbf{r}) \;=\; q\,\left(\delta(\mathbf{r} - a\,\mathbf{e}_x) + \delta(\mathbf{r} + a\,\mathbf{e}_x) - \delta(\mathbf{r} - b\,\mathbf{e}_y) - \delta(\mathbf{r} + b\,\mathbf{e}_y)\right)\;.$$

$$q_{\rm ges} \;=\; 0 \qquad \text{(klar);} \qquad\qquad \mathbf{p} \;=\; \int d^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,\mathbf{r} \;=\; q\int d^3\mathbf{r}\begin{pmatrix} -a + a \\ -b + b \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; 0$$

Monopol- und Dipolfeld verschwindet in diesem Fall.

➢ Symmetrischer Quadrupoltensor:

$$\mathbf{Q} \;=\; (Q_{ik}) \;=\; \frac{2q}{3}\begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

➢ Beispiel:

$$\mathbf{Q} \;=\; \int_B d^3r'\,\left(x_i'x_j' - \frac{r'^2}{3}\,\delta_{ij}\right)\,\rho(\mathbf{r}')$$

$$Q_{xx} \;=\; \int_B d^3r\,\left(x\,x - \frac{r^2}{3}\right)\,\rho(\mathbf{r}) \;=\; q\left(a^2 - \frac{a^2}{3} + a^2 - \frac{a^2}{3} + \underbrace{\frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3}}_{-q}\right) \;=\; \frac{4q\,a^2}{3} + \frac{2q\,b^2}{3} \;=\; \frac{2q}{3}(2a^2 + b^2)\;.$$

$$Q_{zz} \;=\; \ldots \qquad\qquad Q_{ik} \;=\; 0 \qquad \text{wegen } \delta_{ik} \text{ im allgem. Ausdruck}$$

➢ Es können ferner (noch) kompliziertere Ladungsverteilungen mit (allein) höheren Multipolen entworfen werden.

4.3. Energie und Drehmoment von Multipolverteilungen

4.3.a. Energie einer lokalisierten Ladungsverteilung im äußeren Feld

➢ Potenzielle Energie: ... lokalisierte Ladungsverteilung mit Gesamtladung q

$$W = \int_B d^3r\, \rho(\mathbf{r})\, \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$$

➢ Hinreichend konstantes $\mathbf{E}$-Feld: ... Ursprung in Ladungsverteilung und um $\mathbf{r} = 0$ entwickeln; $(\mathbf{r} \cdot \nabla) = (x_i \partial_i)$

$$W = \int_B d^3r\, \rho(\mathbf{r}) \left(\Phi_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\, \Phi_{\text{ext}}\,|_0 + \frac{1}{2}\,(x_i x_j \partial_i \partial_j)\, \Phi_{\text{ext}}\,|_0 + ... \right)$$

$$= ... = q\, \Phi_{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} Q_{ij}\, \partial_i \partial_j\, \Phi_{\text{ext}}\,|_0 + ...$$

4.3.b. Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

➢ (Fern-) Feld eines Dipols $\mathbf{p}_1$ bei $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})\, \mathbf{r}_{12} - \mathbf{p}_1\, r_{12}^2}{r_{12}^5}; \qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$W_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3\,(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})\,(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^5}$$

Wechselwirkungsenergie zweier Dipole $(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{r}_1)$ und $(\mathbf{p}_2,\ \mathbf{r}_2)$

4.3.c. Kraft und Drehmoment auf eine lokalisierte Ladungsverteilung im äußeren Feld

➢ Kraft im äußeren Feld auf Ladungsverteilung:

$$\mathbf{F} \;=\; \int_B d^3r\ \rho(\mathbf{r})\ \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \qquad = \ \dots$$

$$= \ q\,\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) \ + \ (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}_{\text{ext}}\,|_0 \ + \ \frac{1}{2}\,(Q_{ij}\,\partial_i\partial_j)\ \mathbf{E}_{\text{ext}}\,|_0 \ + \ \dots \ = \ 0 \qquad \text{falls} \quad q=0 \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(r) \text{ in } B \ = \ \text{const.}$$

➢ Im konstanten **E**-Feld wirkt keine Kraft auf $\begin{cases} \text{reine elektrische Dipole und Quadrupole} \\ \text{Ladungsverteilung mit verschwindender Gesamtladung.} \end{cases}$

4.4. Laplace-Gleichung in Zylinder- und Kugelkoordinaten

➢ Lösungen der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \ = \ \Delta\,\Phi(r,\vartheta,\varphi) \ = \ 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Legendre – Polynome; Kugelfunktionen}$$

4.4.a. Separation der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

➢ Separationsansatz:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}\,P(\cos\vartheta)\,S(\varphi) = \frac{R(r)}{r}\,Y(\vartheta,\varphi)$$

$$= \ldots$$

➢ drei gDgl.:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} - \frac{\lambda}{r^2} R(r) = 0 \qquad \ldots \quad \text{Bessel – Funktionen}$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\,\frac{d\,P}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0 \qquad \ldots \quad \text{Legendre Polynome bzw. zugeordnete L.}$$

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} + m^2\,S(\varphi) = 0 \qquad \ldots \quad S_m(\varphi) = e^{\pm i m\varphi}$$

➢ Speziell zylindersymmetrische Potenziale in Kugelkoordinaten: $m = 0, \quad S_0(\varphi) \equiv 1$

$$(1-x^2)\,P'' - 2x\,P' + \lambda\,P = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{erzeugende Dgl. der Legendre – Polynome}$$

4.4.b. Allgemeine zylindersymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung

➢ Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung für zylindersymmetrische Potentiale:

$$\Phi(r, \vartheta) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l\, r^l \;+\; \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta)\, \langle P_l \,|\, \Phi \rangle$$

➢ r-abhängigen Fourierkoeffizienten des Potentials.

$$P_l(\cos\vartheta) \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{l0}(\vartheta, \varphi \qquad \text{... beliebig)}$$

$$\langle P_l \,|\, P_{l'} \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} d\, \cos\vartheta\; P_l(\cos\vartheta)\; P_{l'}(\cos\vartheta) \;=\; \frac{4\pi}{2l+1}\, \langle Y_{l0} \,|\, Y_{l'0} \rangle \;=\; \frac{2}{2l+1}\, \delta_{ll'}\,.$$

$$\langle P_l \,|\, \Phi \rangle \;=\; \int_{-1}^{1} d\, \cos\vartheta\; P_l(\cos\vartheta)\; \Phi(r, \vartheta) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{2}{2l+1} \left(a_l\, r^l \;+\; \frac{b_l}{r^{l+1}} \right)$$

➢ **Eingeschlossene Punktladung in leitender und geerdeter Kugel:**

➢ Ladung q sei am Ort $\mathbf{r}_q \;=\; r_q\, \mathbf{e}_z$: ... in geerdeten Metallkugel mit Radius $R > r_q$.
Gesucht: $\Phi(\mathbf{r} \;\leq\; R)$ mit $\Phi(R) \;=\; 0$ ... Potenzial innerhalb der Kugel

➢ Zylindersymmetrisch für $\mathbf{r}_q \,||\, \mathbf{e}_z$:

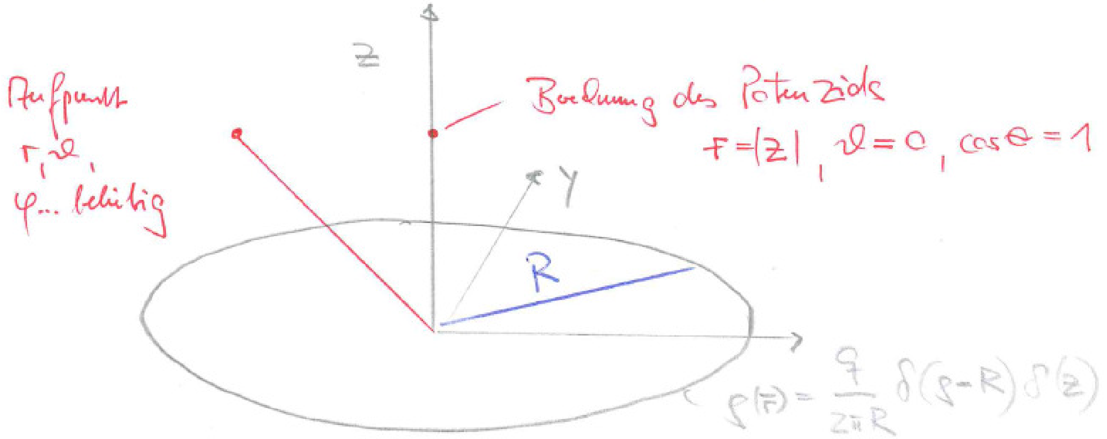
➢ In Zylinderkoordinaten und mit $r_< \;=\; \min(r, r_q)$, $r_> \;=\; \max(r, r_q)$ und $r_q \;=\; |z|$ ist das Potential innerhalb der

Kugel die Summe des Potentials der Punktladung und einer harmonischen Funktion.

$$\Phi(r < R, \vartheta) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{|\mathbf{r}\,-\,\mathbf{r}_q|} + \Phi_{\text{harmonisch}} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\vartheta) \;+\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos\vartheta)$$

$$\Phi(r \,\le\, R, \vartheta) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, q \sum_l \left[\frac{1}{r_>}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l - \frac{1}{R}\left(\frac{r_q\, r}{R^2}\right)^l\right] P_l(\cos\vartheta)$$

4.4.c. Potential eines homogen geladenen Ringes



➢ Betrachten homogen geladenen Kreisring mit Radius R in der $x-y$ Ebene $(z=0)$.

➢ Ladungsverteilung für einen gleichmäßig geladenen, ∞-dünnen Ring ist

$$\rho(\mathbf{r}) \;=\; \frac{q}{2\pi R}\,\delta(\rho-R)\,\delta(z), \qquad\qquad \rho^2 \;=\; x^2+y^2\,.$$

➢ Beliebiger Punkt $(0,0,z)$ auf der z-Achse: $\sqrt{z^2+R^2}$

$$\Phi(0,0,z) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int dz'd\varphi'd\rho'\,\rho'\,\frac{q}{2\pi R}\,\frac{\delta(\rho'-R)\,\delta(z')}{\sqrt{z^2+R^2}} \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

➢ Potenzial des Ringes auf Symmetrieachse: $=$ Potenzial einer Punktladung q im Abstand $\sqrt{z^2+R^2}\,.$

➢ Allgemeine Lösung des Potenzials:

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi\text{...beliebig}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\underbrace{a^l\,r^l}_{r<R} + \underbrace{\frac{b^l}{r^{l+1}}}_{r<R}\right)P_l(\cos\vartheta)$$

$$\Phi(r<R) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{l=0}^{\infty} a^l\,r^l\,P_l(\cos\vartheta); \qquad\qquad \Phi(r>R) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b^l}{r^{l+1}}\,P_l(\cos\vartheta)$$

➢ Das Gesamtpotenzial ist daher

$$\Phi(r<R) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-1/2\\ l\end{pmatrix}\left(\frac{r}{R}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\vartheta) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{R}\left(1-\frac{r^2}{4R^2}\,(3\,\cos^2\vartheta-1)+O((r/R)^4)\right)$$

$$\Phi(r>R) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-1/2\\ l\end{pmatrix}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\vartheta) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{q}{r}\left(1-\frac{R^2}{4r^2}\,(3\,\cos^2\vartheta-1)+O((R/r)^4)\right)\,.$$

4.5. Multipolentwicklungen in Kugelkoordinaten

Erzeugende Dgl. der zugeordneten Legendre-Polynome $P_l^m(x) \;=\; P_l^m(\cos)$:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\,P}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) \;=\; 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad P_l^m(x) \;=\; \frac{(-1)^m}{2^l\,l!}\,\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^{\,l+m}}{dx^{\,l+m}}\,\left(1x^2-1\right)^l$$

$$l \;=\; 0,1,2,..., \qquad m \;=\; 0,\,\pm1,\,\pm2,...,\,\pm l$$

4.5.a. Einschub: Kugelfunktionen

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \;=\; \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\vartheta)\,e^{im\,\varphi} \quad l \;=\; 0,\,\pm1,\,...,\quad -l\,\le\,m\,\le\,l\,.$$

➢ Vollständigkeit der Kugelfunktionen: Jede auf der Kugeloberfläche ($0 \leq \vartheta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) integrable Funktion $g(\vartheta, \varphi)$ kann (vollständig) nach Kugelfunktionen entwickelt werden:

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \, \langle Y_{lm} \,|\, g \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \, c_{lm}$$

$$c_{lm} \equiv \langle Y_{lm} \,|\, g \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \, Y^*_{lm}(\vartheta, \varphi) \, g(\vartheta, \varphi)$$

4.5.b. Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta \, \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l}^{l} \left(a_{lm} \, r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

4.5.c. Multipolentwicklung des Fernfeldes in Kugelkoordinaten

➢ **Multipolentwicklung des Coulombpotentials:** Mit $r_< = \min(r, r')$ und $r_> = \max(r, r')$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \, = \, ... = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l P_l(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}'_r)$$

$$= \frac{1}{r_>} \sum_{l=0} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{r_<}{r_>} \right)^l Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi') \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

➢ Lokalisierte Ladung $\rho(\mathbf{r}') \neq 0$ innerhalb einer Kugel mit Radius R: ... $r' < R < r$ und $r_> = r$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{B(\rho)} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{l=0,\, m=-l}^{\infty,\, l} Q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}, \quad Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_{B(\rho)} d^3r'\, r'^l\, Y^*_{lm}(\vartheta', \varphi')\, \rho(\mathbf{r}')$$

Multipolmomente = spärische Tensoren l.-ter Stufe mit $2l - 1$ unabhängigen Komponenten.

4.6. Zusammenfassung und Überblick zur Elektrostatik

Die in den letzten beiden Kapiteln diskutierten Befunde und Ergebnisse können tabellarisch zusammengefaßt werden:

Größen und Gleichungen	Elektrostatik
1.) Feld:	elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$
2.) Kraftgesetz:	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; q\,\mathbf{E}(\mathbf{r})$
3.) Feldgleichungen:	
– differentiell:	$\operatorname{div}\mathbf{E} \;=\; \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} \;=\; 0$
– integral:	$\int_{\partial B} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} \;=\; \frac{Q}{\epsilon_o}, \quad \oint_{\partial A} d\mathbf{s}\cdot\mathbf{E} \;=\; 0$
4.) Potenzial:	skalares Potenzial Φ : $\quad \mathbf{E} \;=\; -\operatorname{grad}\Phi$: $\quad \Delta\,\Phi \;=\; -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o}$ (Poisson-Gleichung) $\Phi(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$
5.) Feldenergie:	$\frac{1}{8\pi\epsilon_o}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{\lvert\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\rvert} \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}\int_B d^3r\,\rho(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r}) \quad\rightarrow\quad \frac{\epsilon_o}{2}\int_B d^3r\,\lvert\mathbf{E}(\mathbf{r})\rvert^2$
6.) Fernfeld:	Multipolmomente in kartesischen und Kugelkoordinaten; insbesondere Ladung q (Skalar; Monopomoment), elektrisches Dipomoment $\mathbf{p}$ (Vektor) und elektr. Quadrupolmoment $\mathbf{Q}$ (Tensor 2. Stufe).

4.7. Aufgaben

Siehe Übungen.

5. Magnetostatik (MS)

5.1. Strom und Stromdichte: Ladungserhaltung

➢ Strom: bezeichnet die pro Zeiteinheit transportiert Ladung

$$I \;=\; \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} \;=\; \frac{dq}{dt} \qquad \text{... Messgroesse [A, Ampere]} \quad \text{... Grundgroesse im MKAS System}$$

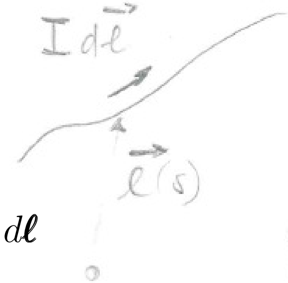
➢ Stromdichte: kennzeichnet die zugeordnete lokale Größe

$$j \;=\; \frac{\text{Strom}}{\text{Flaeche}} \;=\; \frac{I}{\Delta\, a} \qquad \text{Strom pro Querschnittsfläche} \perp \text{zur jeweiligen Flußrichtung der Ladung}$$

➢ Stromfäden: = idealisierte dünne Drähte, ... durch gerichtete Raumkurven $\boldsymbol{\ell} \;=\; \boldsymbol{\ell}(s)$ charakterisiert mit Tangentenvektor in Richtung des Stromes

$$\mathbf{t} \;=\; \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell}$$

➢ Lokale Stromdichte: ... Vektorfeld



$\rho\, d^3\vec{r} \iff dq$

$\vec{j}\, d^3\vec{r} \iff I\, d\vec{\ell}$

$$\mathbf{j} \;=\; \frac{I}{\Delta\, a}\,\frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell} \;=\; \underbrace{\frac{I}{\Delta\, a}\,\frac{d\boldsymbol{\ell}}{d\ell}}_{d^3\mathbf{r}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t)d^3r \;=\; I\, d\boldsymbol{\ell}$$

Volumenelement $d^3\vec{r}$ liefert Beitrag $I\,d\vec{\ell}$ zum magnetischen Feld.

- Magnetostatik (MS): $\quad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}) \;\neq\; \mathbf{j}(t)$

N bewegte Punktladungen:

- $\{q_i,\; \mathbf{r}_i,\; \mathbf{v}_i \;=\; \dot{\mathbf{r}}_i\}$

$$\rho_m(\mathbf{r},t) \;=\; \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \qquad \text{Ladungsdichte}$$

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r},t) \;=\; \sum_{i=1}^{N} q_i\, \mathbf{v}_i\, \delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \qquad \text{Stromdichte}$$

- Daher gilt für kleines aber ansonsten beliebiges Volumen

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r},t)\,\Delta\, B \;=\; \sum_{i=1}^{N} q_i\, \mathbf{v}_i\, \delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\;\Delta\, B \;=\; \rho(\tilde{\mathbf{r}},t)\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{r}},t)\,\Delta\, B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \;=\; \rho(\mathbf{r},t)\; \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\;.$$

$= \text{Skalarfeld} \cdot \text{Vektorfeld}$

➢ $\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{r}}, t)$ ... (mittleres) Geschwindigkeitsfeld der freien Ladungsträger

➢ **Ladungserhaltung. Kontinuitätsgleichung:** ...empirischer Befund

$$\frac{d}{dt}\int_B d^3r\, \rho(\mathbf{r}, t) \;=\; -\int_{\partial B} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad\Longrightarrow\quad \int_B d^3r \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\right) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \;=\; 0$$

Kontinuitätsgleichung

➢ MS: $\rho \neq \rho(t)$: $\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; 0\,.$ Stromdichte ist quellenfrei.

➢ Kirchhoffs Knotenregel: In einem elektrischen Schaltkreis ist an jedem Knoten (Verzweigungspunkt) die zufließende Ladung gleich der abfließenden Ladung.

5.2. Magnetisches Feld: Das Gesetz von Biot-Savart

5.2.a. Kraft auf stromdurchflossenen Leiter

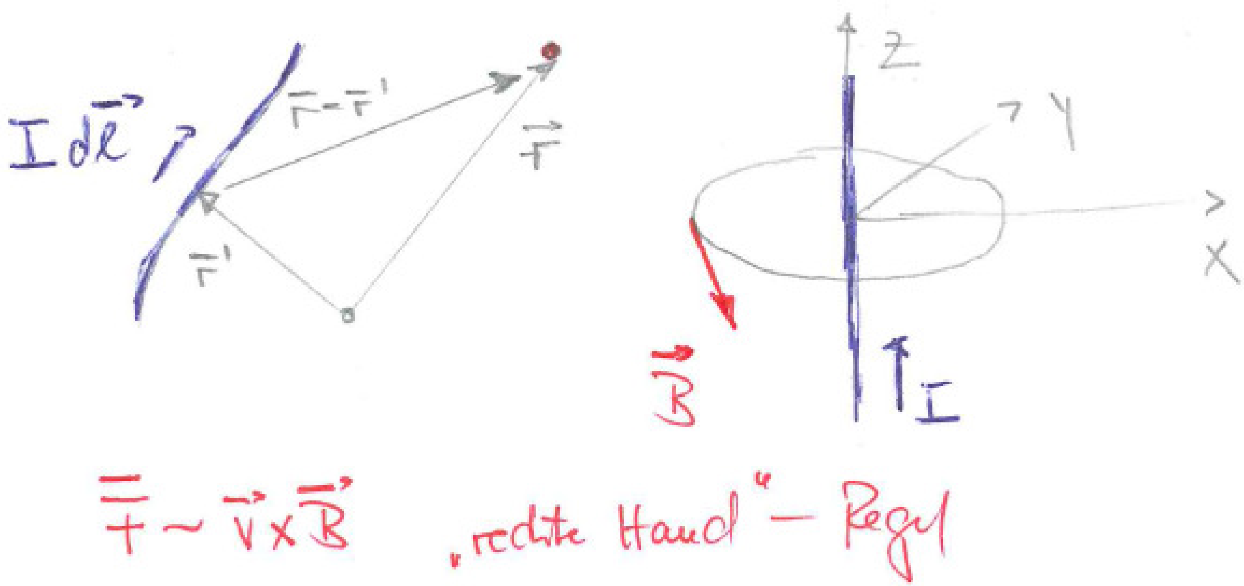
➢ Kraft auf kleines Wegelement $d\ell$ eines stromdurchflossenen Leiter:

$$\left.\begin{aligned} dF &\propto I, \\ dF &\propto d\ell \\ dF &\propto B \\ d\mathbf{F} &\perp d\boldsymbol{\ell}, \mathbf{B} \end{aligned}\right\} \qquad d\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \qquad \text{... Messgroesse}$$

5.2.b. Magnetisches Feld B (magnetische Induktion)

Stationären Stromverteilung:

➢ Stromdurchflossener Leiter erzeugt selbst Magnetfeld $B \sim I,\ \ell;\ \mathbf{B} \perp \ell,\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}')$



➢ Diese Feld ist ebenfalls proportional zur Stromstärke I, der Länge des Drahtstückes und steht senkrecht auf der Verbindungsachse Draht–Aufpunkt und ist gegeben durch

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_o\, I}{4\pi}\, d\boldsymbol{\ell} \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi} \int_B d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$= \;\ldots$$

$\mathbf{r}'$ über alle stromdurchflossenen Orte (Stromfäden) in B

Beispiel (Lorentzkraft auf bewegte Punktladung): ... Stromdichte einer Punktladung $\mathbf{j} \;=\; q\,\mathbf{v}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ liefert Kraftdichte und wirkende Kraft

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{d\mathbf{F}}{dV} \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \qquad\Longrightarrow\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; \int d^3r\; \mathbf{f}(\mathbf{r}) \;=\; \int d^3r\, \mathbf{j} \times \mathbf{B} \;=\; q\,\mathbf{v}\,|_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$$

$$\Longrightarrow\qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) \;=\; q\,\mathbf{v}|_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \qquad\qquad \mathbf{F} \;\perp\; \mathbf{v},\; \mathbf{B}\,.$$

von der Lorentzkraft her bekannter Zusammenhang .

5.2.c. Bewegung eines geladenen Teilchens im em Feld

➢ Bewegung eines geladenen Teilchens: ... folgt Bewegungsgleichung, Lorentzkraft + AB

$$m\,\ddot{\mathrm{x}} \;=\; m\,\frac{d\,\mathbf{v}}{dt} \;=\; q\;(\mathbf{E} \,+\, \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

➢ Zeitliche Änderung der kinetischen Energie: ... Integral der Bewegung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,\mathbf{v}^2}{2}\right) \;=\; \mathbf{v}\cdot m\,\frac{d\,\mathbf{v}}{dt} \;=\; \mathbf{v}\cdot q\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \;=\; q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\;,$$

Magnetfeld beeinflußt Richtung des Teilchens, nicht den Betrag

➢ Bewegung im konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} \;=\; B\,\mathbf{e}_z$:

$$\frac{dv_x}{dt} \;=\; \omega\,v_y, \qquad \frac{dv_y}{dt} \;=\; -\omega\,v_x, \qquad \frac{dv_z}{dt} \;=\; 0$$

Bewegung entlang des Magnetfeldes in *gleichförmig.*

5.2.d. Gesetz von Biot-Savart

➢ Magnetfeld eines geraden, ∞-langen, stromdurchflossenen Drahtes: ... Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})\,||\,\mathbf{e}_z$, Strom I

➢ Flächenelement: $d\mathbf{a} \;=\; dx\,dy\,\mathbf{e}_z \;=\; r\,dr\,d\varphi\,\mathbf{e}_z$ ... Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\mathbf{e}_z \;=\; I\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,\mathbf{e}_z \qquad \delta-\text{foermige Stromdichte} \;\rightarrow\; \text{Gesamtstrom } I$$

➢ Zylindersymmetry: $\mathbf{B} \;=\; \mathbf{B}(r,\varphi,z) \;\neq\; \mathbf{B}(\varphi,z)$ und $\mathbf{B}\,||\,\mathbf{e}_\varphi \;\perp\; \mathbf{e}_z,\,\mathbf{e}_r \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B} \;=\; B(r)\,\mathbf{e}_\varphi$ in der $x-y$

Ebene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_B d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} dr' \, r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \frac{\delta(r')}{2\pi r'} \, \mathbf{e}_z \times \frac{r \, \mathbf{e}_r - z' \, \mathbf{e}_z}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_o I}{4\pi} \mathbf{e}_\varphi \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{r}{(r^2 + z'^2)^{3/2}}}_{2/r} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{r} \mathbf{e}_\varphi \, .$$

(ursprüngliches) Biot-Savart-Gesetz

Beispiel (vom einem Strom durchflossener Kreisring):

Ring mit Radius R in $x - y$ Ebene und mit der z-Achse als Symmetrieachse: ... dann Magnetfeld maximal im Zentrum des Ringes

$$B(z) = \frac{\mu_o}{4\pi} I \, R \int d\varphi' \, \mathbf{e}_\varphi \times \frac{z \, \mathbf{e}_z - R \, \mathbf{e}_{r'}}{|z \, \mathbf{e}_z - R \, \mathbf{e}_{r'}|^3} = \frac{\mu_o}{2} \frac{I \, R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \qquad \Longrightarrow \qquad B_z(z = 0) = \frac{\mu_o I}{2 \, R} \, .$$

Beispiel (Kraft zwischen zwei parallelen Stromfäden:):

Kraft pro Längeneinheit: ... zwischen zwei parallelen und ∞-langen und dünnen Drähten.
Kraft auf Drahtelement $d\boldsymbol{\ell}$: $\quad d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I \, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\frac{dF_1}{d\ell_1} = I_1 \, B_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I_1 \, I_2}{d} = I_2 \, B_1 = \frac{dF_2}{d\ell_2} \qquad \begin{cases} \text{anziehend fuer gleichgerichte Stroeme} \\ \text{abstossend fuer entgegengesetzte Stroeme} \end{cases}$$

Die Kräfte wirken entlang dem (kürzesten) Abstand der Drähte und sind **anziehend für gleichgerichtet Ströme** bzw. **abstoßend für entgegengesetzte Ströme.**

5.3. Feldgleichungen der Magnetostatik

5.3.a. Differentielle Form der Feldgleichungen

➢ Magnetostatische Feldgleichungen:

$$\text{div}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; 0, \qquad\qquad \text{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \mu_o\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{c^2\,\epsilon_o}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

magnetostatische Feld ist quellenfrei; Wirbeldichte wird durch Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ bestimmt.

➢ Da $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ quellenfrei:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad \text{reines Wirbelfeld von} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

➢ Partikuläre statische Lösung für Vektorpotenzial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \qquad\qquad \text{denn}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \text{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\,\nabla_{\mathbf{r}}\times\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

➢ Eichfreiheit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;\to\; \mathbf{A}'(\mathbf{r}) \;=\; \mathbf{A} \;+\; \text{grad}\,\Lambda(\mathbf{r})\,,$$

magnetisches Feld ist von Eichfunktion $\Lambda(\mathbf{r})$ unabhängig.

➢ Coulomb-Eichung: $\mathbf{A}$ soll quellenfrei sein

$$\Lambda(\mathbf{r}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_o\,\mathbf{j} \qquad \text{denn}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\mathbf{A}}_{=0} - \Delta\,\mathbf{A} = -\Delta\,\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\,\underbrace{\Delta_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}_{4\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \mu_o\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

5.3.b. Integrale Form der Feldgleichungen

➢ Amperesches Gesetz:

$$\oint_C d\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = \int_A d\,\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_o\int_A d\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{j} = \mu_o\,I \qquad \ldots \text{ senkrechte Komponenten von } I$$

Zirkulation des $\mathbf{B}$-Feldes $= \mu_o \times$ durch Fläche fließender Strom.

Das Linienintegral über das magnetische Feld entlang eines geschlossenen Umlaufes ist gleich μ_o mal dem durch die Fläche fließenden Stromes.

➢ Magnetischer Fluß durch geschlossene (Ober-) Fläche verschwindet:

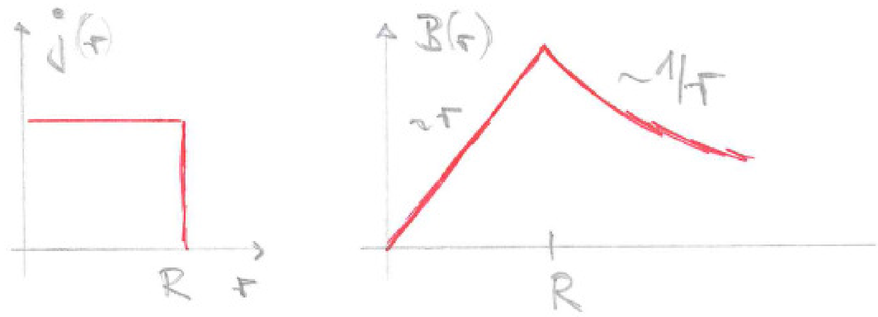
$$\Phi_m \equiv \oint_{\partial B} d\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} = \int_B d^3r\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad \text{magnetischer Fluss}$$

Keine magnetischen Ladungen und die magnetischen Feldlinien sind folglich stets geschlossen.

5.3.c. Magnetisches Feld eines homogen durchflossenen Drahtes

Zylindersymmetrischer Stromleiter mit Radius R:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; j(r)\,\mathbf{e}_z \;=\; \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} \;=\; \text{const.} & (r \,\leq\, R) \\ 0 & (r \,>\, R) \end{cases}$$



Lösungswege:

- Anwendung des Ampereschen Gesetzes: $\oint_C d\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} \;=\; \mu_o\, I\;.$
- Lösung der Feldgleichung (in Coulomb-Eichung): $\Delta\,\mathbf{A} \;=\; -\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \;=\; -\mu_o\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\;.$
- Berechnung des Integrals: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\;\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$

Beispiel (Anwendung des Ampereschen Gesetzes):

Richtung von $\mathbf{B}$: $\displaystyle \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \;=\; \mu_o \oint_A d\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} \;=\; \mu_o \, I \,, \qquad d\mathbf{a} \,||\, \mathbf{j} \,||\, \mathbf{e}_z \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A} \;=\; \int d^3r \, \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \;=\; A(r) \, \mathbf{e}_z$

$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; \text{rot}\, \mathbf{A} \;=\; \ldots \;=\; B(r) \, \mathbf{e}_\varphi$ ... Feldlinien sind Kreise

Betrag von $\mathbf{B}$: $\displaystyle \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \;=\; 2\pi \, r \, B(r) \;=\; \mu_o \begin{cases} \frac{I\, r^2}{R^2} \\ I \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; B(r) \, \mathbf{e}_\varphi \;=\; \frac{\mu_o \, I}{2\pi} \, \mathbf{e}_\varphi \begin{cases} \frac{r}{R^2} & r \;\leq\; R \\ \frac{1}{r} & r \;>\; R \end{cases}$

5.3.d. Magnetisches Feld einer unendlichen langen Spule

- ∞-lange Spule mit N Windungen/Länge $\mathcal{L}$: ... ausgerichtet entlang z-Achse; Strom $I \,||\, \mathbf{e}_\varphi$ in Kreisen mit R
- Annahme: $\mathbf{B} \;=\; B_o \, \mathbf{e}_z \;=\;$ const. im Inneren der Spule <u>und</u>
  $\mathbf{B} \;=\; 0$ im Außenraum.
- Amperesches Gesetz: ... für kleines Rechteck entlang der Spulenwand

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \;=\; \mathcal{L} \, B_o \;=\; \mu_o \, N I \;=\; \mu_o \, I_{\text{ges}}, \qquad \text{Rechteck ueber Spulenrand} \qquad \Longrightarrow \qquad B_o \;=\; \mu_o \, \frac{N I}{\mathcal{L}}$$

➢ Magnetischer Fluß im Inneren der Spule

$$\Phi_m \;=\; \int_A d\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} \;=\; \pi R^2\, B_o \;=\; \pi\mu_o\,\frac{N I}{\mathcal{L}}\, R^2 \;=\; \mu_o\,\frac{N\, I\, A}{\mathcal{L}} \qquad\qquad A \quad \text{... Querschnittsflaeche}$$

∂B sei $x-y$ Ebene; Beitrag nur innerhalb der Spule

5.4. Selbstinduktion

➢ Gegeben: N Stromschleifen ... mit (station.) Strömen I_1, ..., I_N, umschlossenen Flächen A_i und Rändern $C_i = \partial A_i$.

➢ Gesucht: **B**-Feld zwischen und im Innenraum der Stromschleifen, ... durch Ströme eindeutig bestimmt.

➢ **B**-Feld: Beiträge der Ströme überlagern sich linear

$$\Phi_m(A_i) \;=\; \int_{A_i} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} \;=\; \sum_{j=1}^{N} L_{ij}\, I_j \qquad\qquad \text{magnetischer Fluss} \;=\; \text{Induktionsfluss durch i} - \text{te Schleife}$$

L_{ij} ... Induktionskoeffizienten.

➢ Speziell: L_{ii} ... Selbstinduktivität der i-ten Stromschleife

L_{ij} $(i \neq j)$ ... wechselseitige Induktionskoeffizienten bzw. wechselseitige Induktivität.

Beispiel (Selbstinduktivität einer langen, geraden Spule): ... N Leiterschleifen und konstanter Fluß.

Magnetischer Fluß der ∞-langen Spule ist $\Phi_m = \mu_o \frac{N\,I\,A}{\mathcal{L}}$ und damit

$$L = N\,\frac{\Phi_m}{I} = \mu_o\,N^2\frac{A}{\mathcal{L}}\,.$$

Die wechselseitigen Induktionskoeffizienten können bestimmt werden, da $L_{ij}\,I_j$ offenbar den Anteil des Induktionflußes bezeichnet, des vom Strom in der j-ten Stromschleife induzierten magnetischen Feldes B_j,

$$\begin{aligned}
L_{ij}\,I_j &= \int_{A_i} d\,\mathbf{a}_i \cdot B_j(\mathbf{r}_i) = \oint_{C_i} d\,\mathbf{r}_i \cdot \mathrm{rot}\,B_j(\mathbf{r}_i) = \oint_{C_i} d\,\mathbf{r}_i \cdot A_j(\mathbf{r}_i) \\
\mathbf{A}_j(\mathbf{r}_i) &= \frac{\mu_o\,I_j}{4\pi}\int_{C_j}\frac{d\,\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int d^3r\,\frac{\mathbf{j}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{j}_j\,d^3r = I_j\,d\,\mathbf{r} \\
L_{ij} &= L_{ji} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{C_i}\int_{C_j}\frac{d\,\mathbf{r}_i \cdot d\,\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\,.
\end{aligned}$$

Diese Formel kann genutzt werden, um die Induktionskoefffizienten für zwei parallele Kreisströme, die senkrecht zur z-Achse im Abstand h zu berechnen; dies führt auf *elliptische* Integrale, deren Grenzfälle für sehr großen Abstand ($h \gg R_1, R_2$) und sehr kleinen Abstand ($h \ll R_1, R_2$) diskutiert werden können.

5.5. Randwertprobleme der Magnetostatik

➢ Elektrostatik:

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{r}) \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad \text{in } B \qquad \text{und} \qquad \Phi\,|_{\partial B} \;=\; \Phi_o, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\,|_{\partial B} \;=\; -\frac{\sigma}{\epsilon_o}$$

➢ Magnetostatik:

$$\text{rot}\,\mathbf{B} \;=\; \mu_o\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; -\text{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) \qquad \text{falls} \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) \;=\; 0$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} \;=\; \Delta\,\Psi \;=\; \text{div}\,\text{grad}\,\Psi(\mathbf{r}) \;=\; 0 \qquad \text{in} \quad B \qquad \text{und} \qquad \Psi|_{\partial B} \;=\; \Psi_o$$

5.6. Multipole des magnetostatischen Feldes

5.6.a. Multipolentwicklung des magnetostatischen Feldes

➢ Fernfeld des Vektorpotenzials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: ... für $r \gg r'$ und am Ursprung lokalisierte Stromverteilung

$$= \;...\mathbf{A}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi}\int_B d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}\,-\,\mathbf{r}'|} \;=\; \frac{\mu_o}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\underbrace{\int_B d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')}_{=\,0} \;+\; \frac{x_m}{r^3}\int_B d^3r'\,x'_m\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') \;+\; ...\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) \;=\; -\text{rot}\,\mathbf{A}$$

➢ Keine magnetischen Ladungen bekannt: ... erster Term sollte identisch verschwinden.

➢ Fernfeld des Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \ldots$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_o}{8\pi} \int_B d^3r \;\; \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad \ldots \text{ magnetischer Dipol}$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o} \int_B d^3r \;\; \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) \qquad \ldots \text{ elektrischer Dipol}$$

➢ Fernfeld von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{3\,\mathbf{r}\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - r^2\,\mathbf{m}}{r^5} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2\,\mathbf{p}}{r^5}$$

5.6.b. Magnetischer Dipol einer Stromschleife

➢ Kreisrunde Stromschleife mit Fläche $\mathcal{A}$ und Richtung $d\boldsymbol{\mathcal{A}} = d\,\mathcal{A}\,\mathbf{n}$; $\mathbf{j}(\mathbf{r})\,d^3r = I\,d\,\mathbf{r}$

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_o}{8\pi} \int_B d^3r \;\; \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o\,I}{8\pi} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$$

$$m_z = \frac{\mu_o\,I}{8\pi} \oint (x\,dy - y\,dx) = \frac{\mu_o\,I}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\;R^2 = \frac{2\pi R^2\,\mu_o\,I}{8\pi} = \frac{\mu_o\,I}{4\pi}\,\mathcal{A}_z\,,$$

$$m_x,\; m_y = \ldots \qquad \text{analog}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_o\,I}{4\pi}\,\mathcal{A} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{m} = I\,\mathcal{A} \qquad \ldots \text{ Faktor } \frac{\mu_o}{4\pi} \text{ wird mitunter ausgeklammert}$$

$\mathcal{A}_z$ ... Projektion der von der Stromschleife umschlossenen Fläche $\mathcal{A}$ auf $x - y$ Ebene.

5.6.c. Dipolmoment von Punktladungen zum Zeitpunkt t_o

➢ Dipolmoment eines Bahn- und Spindrehimpulses:

➢ Stromdichte einer bewegten Punktladung: $\mathbf{j} = \sum_i q_i\, \mathbf{v}_i\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_o}{8\pi} \sum_i q_i\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{\mu_o}{8\pi} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \mathbf{I}_i \qquad \begin{cases} m_i & \text{Masse des i} - \text{ten Teilchens} \\ I_i = m_i\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i & \text{Drehimpuls des...} \end{cases}$$

5.6.d. Kraft und Drehmoment auf einen Dipole im äußeren statischen Magnetfeld

➢ Kraft eines äußeren Magnetfeldes auf magnetischen Dipol:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_B d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}') = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\partial\, \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_k} |_0 \times \int_B d^3r'\, x_k'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \qquad \text{weitere Umformung notwendig !!}$$

$$= \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_k - \underbrace{\left(\mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_k} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = 0} \mathbf{m} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\, \mathbf{B}_{\text{ext}}\, |_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{p} \cdot \nabla)\, \mathbf{E}_{\text{ext}}\, |_0$$

5.6.e. Energie eines Dipols im statischen Magnetfeld

➢ Energie eine magnetischen Dipols am Ort $\mathbf{r}_o$:

$$\mathbf{F} = -\nabla\, W_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\, \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r})|_o = \nabla\, (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r})) \qquad \mathbf{m} \quad \text{... const.}$$

$$W_{\text{pot}} = -\,\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_o) = -m\, B_{\text{ext}}(\mathbf{r}_o) \cos\vartheta\ .$$

Maximale (potentielle) Energie, falls $\mathbf{m}$ und $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ entgegengesetzt gerichtet.

5.7. Zusammenfassung: Vergleich zwischen Elektro- und Magnetostatik

Die zentralen Befunde und Ergebnisse der Elektro- und Magnetostatik können tabellarisch gegenübergestellt werden:

Größen und Gleichungen	Elektrostatik	Magnetostatik
1.) Feld:	elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$	magnetisches Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$
2.) Kraftgesetz:	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\,\mathbf{E}(\mathbf{r})$	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$
3.) Feldgleichungen:		
– differentiell:	$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0\,, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$	$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0\,, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_o\,\mathbf{j}(\mathbf{r})$
– integral:	$\int_{\partial B} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_o}\,, \qquad \oint_{\partial A} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E} = 0$	$\oint_{\partial A} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = \mu_o\,I\,, \qquad \Phi_m \equiv \oint_{\partial B} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{B} = 0$
4.) Potenzial:	skalares Potenzial Φ: $\quad \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi$: $\Delta\,\Phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_o}$ (Poisson-Gleichung) $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$	Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: $\quad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$
5.) Feldenergie:	$\frac{1}{8\pi\epsilon_o}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{\lvert\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\rvert}$ $\rightarrow \frac{1}{2}\int_B d^3r\,\rho(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{\epsilon_o}{2}\int_B d^3r\,\lvert\mathbf{E}(\mathbf{r})\rvert^2$	$\frac{1}{2}\int_B d^3r\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{1}{2\mu_o}\int_B d^3r\,\lvert\mathbf{B}(\mathbf{r})\rvert^2$
6.) Fernfeld:	Multipolmomente in kartesischen und Kugelkoordinaten; insbesondere Ladung q (Skalar; Monopomoment), elektrisches Dipomoment **p** (Vektor) und elektr. Quadrupolmoment **Q** (Tensor 2. Stufe).	Multipolmomente in kartesischen Koordinaten; kein magnetischer Monopol, aber allgemein ein magnetisches Dipolmoment **m** (Vektor) und höhere Multipolmomente.
7.) Dipolmoment:	$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int d^3r\;\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})$	$\mathbf{m} = \frac{\mu_o}{8\pi}\int d^3r\;\mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r})$
8.) Dipolpotenzial & Dipolfeld:	$\Phi = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,, \qquad \mathbf{E} = \frac{3\,\mathbf{r}\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) - r^2\,\mathbf{p}}{r^5}$	$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}\,, \qquad \mathbf{B} = \frac{3\,\mathbf{r}\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - r^2\,\mathbf{m}}{r^5}$
9.) Kraft und Drehmoment im äußeren Feld	$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\mathbf{E}_{\mathrm{ext}}\rvert_0\,, \qquad \mathbf{M}_D = \mathbf{p}\times\mathbf{E}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\rvert_0$	$\mathbf{F} = (\mathbf{m}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}\rvert_0\,, \qquad \mathbf{M}_D = \mathbf{m}\times\mathbf{B}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\rvert_0$

5.8. Aufgaben

Siehe Übungen.

6. Grundlagen der Elektrodynamik

6.1. Konzept des elektromagnetischen Feldes

➢ **Charakteristika des em Feldes:**

➢ Vermittler der Kraftwirkung:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o}\,\tilde{q}\,\sum_i^N q_i\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \;=\; \tilde{q}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{F}_L(\mathbf{r}) \;=\; \tilde{q}\;(\mathbf{E}\,+\,\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

$\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ sind nicht unabhängig; $\mathbf{E}' \;=\; \mathbf{E}\,+\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$

➢ Felder: ... besitzen Energie, Impuls, Drehimpuls

➢ Maxwell-Gleichungen = Feldgleichungen des em Feldes

➢ Physikalische Realität: ... em Feld kann sich ferner im Vakuum ausbreiten

6.2. Die Maxwellschen Feldgleichungen im Überblick

6.2.a. Die zeitabhängigen Feldgleichungen

➢ Zeitabhängige Maxwell-Gleichungen: ... zwei zusätzliche Terme.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \underbrace{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}_{\text{Induktion}} \qquad \text{Faradaysche Induktion : ...}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{\text{Verschiebestrom}} + \mu_o\,\mathbf{j}, \qquad \text{Maxwellscher Verschiebestrom :: ...}$$

zeitlich	$\mathbf{B}-$	Feld verursacht	$\mathbf{E}-$ Feldes (elektrische Ringspannung)
veraenderliches	$\mathbf{E}-$	Wirbel des	$\mathbf{B}-$ Feldes (magnetische Ringspannung)

➢ Faradaysche Induktion: ein zeitlich veränderliches **B**-Feld verursacht zusätzliche Wirbel zum elektrischen Feld (und induziert somit elektrische Ringspannungen).

➢ Maxwellscher Verschiebestrom: ein zeitlich veränderliches **E**-Feld verursacht zusätzliche Wirbel zum magnetischen Feld und wirkt insofern wie ein zusätzlicher Strom in den Maxwell-Gleichungen (induzierte magnetische Ringspannungen).

➢ (Maxwell-) Gleichungen + Lorentzkraft = Grundgleichungen der ED

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

6.2.b. Faradaysches Induktionsgesetz

➢ Leiterschleife mit zeitunabhängiger Fläche: ... Wirbel des elektrischen Feldes ... in integraler Form:

$$\underbrace{\oint_{C=\partial A}}_{\text{zeitunabhaengig}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \;=\; -\int_A d\mathbf{a} \cdot \frac{\partial\, \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \,.$$

➢ (Elektrische Ring-) Spannung: ... für eine aufgeschnittene Leiterschleife

$$U \;\equiv\; U_e \;=\; \int_1^2 d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \;=\; \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} \qquad\qquad \mathbf{E} \quad \text{... kein Gradientenfeld in ED}$$

➢ Lenzsche Regel: Die induzierte Spannung U erzeugt zwischen den Drahtenden ein elektrisches Feld, dessen Richtung einen Strom induzierte, dessen **B**-Feld das angelegte Magnetfeld schwächt. oder

Die durch Induktionsströme hervorgerufenen Magnetfelder sind den induzierenden (zeitabhängigen) Magnetfeldern entgegengerichtet.

➢ Leiterschleife mit zeitabhängiger Kontur bzw. Fläche: ... Spannung folgt dann der (negative) Änderung des magnetischen Flußes.

$$U \;=\; -\frac{d\,\Phi_m}{dt} \;=\; -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \,.$$

(allgemeines) Faradaysches Induktionsgesetz

Elektrische (Ring-) Spannung = negative Änderung des magnetischen Flußes.

Beispiel (Wirbelstrombremse): ... beschreibt direkte Anwendung des Faradayschen Induktionsgesetzes.

$$\begin{array}{c} \text{leitende, rotierende} \\ \text{Metallscheibe} \end{array} = \begin{array}{c} \perp \text{ stehendes} \\ \text{Magnetfeld} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Erwaermung des} \\ \text{Metalls} \end{array}$$

6.2.c. Der Maxwellsche Verschiebungsstrom

➢ Kopplung des elektrischen und magnetischen Feldes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} \left(\epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{ES}} \quad \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_o \, \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Kontinuitätsgleichung ist nicht kompatibel mit Elektrostatik

➢ (Maxwellsche) Erweiterung: ... liefert erst konsistentes Bild für Maxwell-Gl. und Ladungserhaltung.

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_o \, \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_o \operatorname{div} \left(\epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0$$

6.2.d. Integralform der Maxwell-Gleichungen

➢ Elektrische Spannung: an Endpunkten einer Kurve C; allgemein wegabhängig

$$U(C) \;\equiv\; U_e(C) \;=\; \int_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

➢ Elektrischer Fluß: durch gerichtetes (Ober-) Flächenstück $\mathbf{A}$:

$$\Phi_e(\mathbf{A}) \;=\; \int_A d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

➢ Magnetische Spannung: an Endpunkten einer Kurve C; allgemein wegabhängig

$$U_m(C) \;=\; \int_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$

➢ Magnetischer Fluß:

$$\Phi_m(\mathbf{A}) \;=\; \int_A d\mathbf{a}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$

➢ **Integralform der Maxwell-Gleichungen:**

➢ Gaußsches Flußgesetz: Elektrische Fluß durch ∂B ist gleich der Gesamtladung in B

$$\epsilon_o \oint_{\partial B} d\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; \epsilon_o\,\Phi_e\,|_{\text{geschlossen}} \;=\; Q(B)\,.$$

➢ Faradaysches Induktionsgesetz: Elektrische Ringspannung entlang des Randes eines (beliebigen aber gerichteten) Flächenstückes ist proportional zur zeitlichen Änderung des durch diese Fläche tretenden Flußes

$$U(C) \equiv U_e(C) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d\,\Phi_m}{dt}.$$

➢ Oerstedsches Flußgesetz: Es gibt keine magnetischen Ladungen bzw. der magnetische Fluß verschwindet für jede geschlossene Oberfläche

$$\Phi_m(\mathbf{A})\,|_{\text{geschlossen}} = \oint_{\partial B} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0\,.$$

➢ Maxwellsches Verschiebestromgesetz: Magnetische Ringspannung entlang des Randes eines (beliebigen aber gerichteten) Flächenstückes ist proportional zur Summe des elektrischen Stromes und des Verschiebestromes durch diese Fläche, d.h. der zeitlichen Änderung des durch diese Fläche tretenden elektrischen Flußes

$$U_m(C) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_o\, I(A) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt} \int_A d\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mu_o\, I + \frac{1}{c^2}\frac{d\,\Phi_e}{dt}\,.$$

6.2.e. Vereinheitlichte Theorie

➢ Maxwellsche Theorie: ... vereinigt zwei (weitgehend) unabhängige Phänomene, elektrische + magnetische

➢ Newtons Gravitationstheorie (Gravitationsgesetz): ... Vereinheitlichung der Fallgesetze und der Planetenbewegung geführt (siehe die Keplerschen Gesetze knapp 250 Jahre früher).

➢ Elektroschwache Theorie: ... em + schwache WW (Weinberg, Salam and Glashow, 1960er)

6.3. Die Maxwell-Gleichungen in Medien

➢ In Medien: ... (makroskopische Felder der) Polarisation und Magnetisierung ... entstehen durch geeigneten Mittelung der mikroskopischen Felder.

➢ Zwei nützliche Hilfsfelder:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_o\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \qquad \text{dielektrische Verschiebung}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_o}\,\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \mathbf{M}(\mathbf{r},t) \qquad \text{magnetische Feldstaerke}$$

➢ Maxwell-Gleichungen in Medien:

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}\,, \qquad \text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{div}\,\mathbf{B} = 0\,, \qquad \text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}\,.$$

➢ Maxwell-Gleichungen ohne **D** und **H** :

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o}\left(\rho_{\text{ext}} - \text{div}\,\mathbf{P}\right)\,, \qquad \text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0\,, \qquad \text{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_o\left(\mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial\,\mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot}\,\mathbf{M}\right)\,.$$

Anwendung erfordert die Kenntnis weiterer Materialgleichungen.

6.4. Die elektromagnetischen Potenziale

6.4.a. Skalares Potenzial and Vektorpotenzial

➢ Homogene Gleichungen:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\underbrace{\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial t}\right)}_{-\,\mathrm{grad}\,\Phi} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial t}$$

diese Wahl der Potenziale erfüllen die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen

➢ Viererpotenzial $(\Phi,\, \mathbf{A})$: ... Φ und $\mathbf{A}$ nicht unabhängig in der ED

➢ Inhomogene Gleichungen:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \Delta\,\mathbf{A} = \mu_o\,\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_o\,\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\Phi}{\partial t}\right) = \mu_o\,\mathbf{j} \qquad\qquad \Box \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)$$

$$\Delta\,\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\,.$$

➢ Eichbedingungen:

6.4.b. Zerlegungssatz für Vektorfelder

➢ Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$: ... stets als Summe eines wirbelfreien (longitudinalen) + quellenfreien (transversalen) Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \in B \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r})\,|_{\partial B} = 0 \quad + \text{ Ableitungen}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_t(\mathbf{r}) = \underbrace{\text{Gradientenfeld}}_{\text{rot } \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) = 0} + \underbrace{\text{Wirbelfeld}}_{\text{div } \mathbf{v}_t(\mathbf{r}) = 0} \qquad \begin{cases} \mathbf{v}_l \text{ ... wirbelfrei; durch div } \mathbf{v} \text{ bestimmt} \\ \mathbf{v}_t \text{ ... quellenfrei; durch rot } \mathbf{v} \text{ bestimmt} \end{cases}$$

➢ Allgemeine Zerlegung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}_l(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_t(\mathbf{r}) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\,\text{grad}_{\mathbf{r}} \int d^3r' \, \frac{\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\mathbf{v}_l(\mathbf{r}) = \text{grad } \phi} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\,\text{rot}_{\mathbf{r}} \int d^3r' \, \frac{\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{\mathbf{v}_t(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{w}}$$

6.4.c. Eichtransformationen

➢ Eichtransformation: ... ändern die physikalischen Feldern nicht

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda, \qquad \Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \qquad \text{fuer beliebiges Skalarfeld } \Lambda(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} = -\,\text{grad}\,\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}; \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A} \qquad \begin{cases} \text{Physiker sagen :} \\ \text{Die physikalischen Felder sind eichinvariant.} \end{cases}$$

Solche eichäquivalente Potentiale $(\Phi,\, \mathbf{A})$ und $(\Phi',\, \mathbf{A}')$ sind physikalisch nicht unterscheidbar.

- Elektrodynamik ist eine Eichtheorie: ... Vorbild zu (fast) allen modernen (Quanten-) Feldtheorien.
- Eichfreiheit: ... kann ausgenutzt werden, um (zusätzliche) Eichbedingungen zu stellen
- **Coulomb-Eichung:** Wähle $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ so: $0 \;=\; \mathrm{div}\, \mathbf{A}' \;\equiv\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}' \;=\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \,+\, \Delta\,\Lambda \;=\; 0$

  Eichbedingung: $\mathrm{div}\, \mathbf{A} \;=\; 0$ ... liefert für Wellengleichungen

$$\Delta\,\Phi \;=\; -\frac{\rho}{\epsilon_o}, \qquad\qquad \Box\, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \;=\; -\frac{1}{c^2} \boldsymbol{\nabla}\, \dot{\Phi} \;+\; \mu_o\, \mathbf{j}$$

6.5. Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

6.5.a. Energie des em Feldes

- Punktladung q im em Feld:

$$\mathbf{F} \;=\; q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad \Longrightarrow \qquad d\,W \;=\; \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{r} \;=\; q\,\mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{r} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d\,W}{dt} \;=\; q\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \;=\; \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}\,.$$

Nur elektrisches Feld leistet bekanntlich Arbeit; magnetische Kraftkomponente steht senkrecht, $d\,\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$.

- Kontinuierliche Ladungsverteilung: ... analoge Kraft- und Leistungsdichte kann definiert werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \;=\; \rho(\mathbf{r}, t)\; [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \;+\; \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \qquad \text{... Kraftdichte}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \;=\; \underbrace{\rho(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}_{\text{Eigenschaft der Ladung}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{... Leistungsdichte}$$

➢ Gesamte (Arbeits-) Leistung des Feldes: ... an Ladungen im (endlichen) Bereich B:

$$\frac{dW}{dt} = \int d^3r\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \underbrace{=}_{Maxwell} \int d^3r\ \mathbf{E}\cdot\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}\right)$$

$$= \int_b d^3r \left[-\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} - \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}} - \mathrm{div}\,\underbrace{(\mathbf{E}\times\mathbf{H})}_{\mathbf{S}}\right] = -\int_B d^3r \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{S}\right)}_{\text{hier zunaechst als Definition}}$$

$\rightsquigarrow$ Teil einer Kontinuitätsgleichung ... noch zu analysieren !!

➢ Energiedichte des em Feldes:

$$w(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\right], \qquad [\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}] = \frac{A}{m}\frac{Vs}{m^2} = \frac{J}{m^3} \qquad \text{Energiedichte}$$

➢ Lineare und homogene Medien:

$$\mathbf{D} = \epsilon_o\,\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r\,\epsilon_o\,\mathbf{E}; \qquad \epsilon_r = \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{D}} = \epsilon_r\,\epsilon_o\,\dot{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{B} = \mu_o\left(\mathbf{H} - \mathbf{j}_{\text{ext}} - \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\mathbf{M}\right) = \mu_r\,\mu_o\,\mathbf{H}; \qquad \mu_r = \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{B}} = \epsilon_r\,\epsilon_o\,\dot{\mathbf{H}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}\right] = \left[\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}\right]$$

zeitliche Änderung der Energiedichte des em Feldes (= Leistungsdichte)

➢ Energiestromdichte des em Feldes **(Poynting-Vektor)**:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{\mu_o}\,(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \qquad \text{(im Vakuum)}$$

Energiestromdichte des em Feldes = gerichteter Fluß der Energiedichte $\left[\frac{J}{m^3}\right]$

➢ Energiebilanz einer Ladungsverteilung im em Feld: ... Energieaustausches zwischen mechan. + Wärmeenergie + Energie des em Feldes

Beispiel (Wandernder Potenzialwall): ... Betrachten Potenziale im Vakuum

$$\Phi(\mathbf{r},t) = 0, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = a\,(x - ct)^2\,\mathbf{e}_z\,, \qquad a > 0$$

Gesucht: $w(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$ ... Energiedichte, Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = +2ac\,(x - ct)\,\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & a(x - ct)^2 \end{vmatrix} = -2a\,(x - ct)\,\mathbf{e}_y$$

$$w(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\right] = \frac{1}{2\mu_o}\left[\mathbf{B}^2 + \epsilon_o\,\mu_o\,\mathbf{E}^2\right] = \frac{1}{2\mu_o}\left[\mathbf{B}^2 + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{E}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_o}\left[4a^2\,(x - ct)^2 + 4a^2\,(x - ct)^2\right] = \frac{4a^2}{\mu_o}\,(x - ct)^2$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_o}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & +2ac(x - ct) \\ 0 & -2a(x - ct) & 0 \end{vmatrix} = 4a^2c\,(x - ct)^2\,\mathbf{e}_x = c\,w(\mathbf{r},t)\,\mathbf{e}_x$$

Energie wandert mit c entlang Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_x$ des Potenzialwalls.

6.5.b. Energiebilanz bewegter Ladungen im Feld

➢ (Arbeits-) Leistung des em Feldes an bewegter Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\,W}{dt} = \int d^3r \;\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\int_B d^3r \left(\frac{\partial\, w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad -\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial\, w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S}$$

Poyntingsches Theorem: (lokale) Energiebilanz in differentieller Form.

➢ Interpretation: ... mittels folgender Definitionen:

$$\frac{d\,W^{(\text{mechanisch})}}{dt} = \int_B d^3r \;\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

... zeitl. Änderung der mechanischen bzw. Wärmeenergie an $\rho(\mathbf{r}, t)$ in B

$$\frac{d\,W^{(\text{em Feld})}}{dt} = \int_B d^3r \;\frac{\partial\, w(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

... zeitliche Änderung der Energie des em Feldes in B

$$\int_B d^3r \operatorname{div}\mathbf{S} = \oint_{\partial B} d\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}$$

... Energiestrom bzw. em Strahlung durch die Oberfläche ∂B

➢ Energiebilanz in integraler Form: ... In jedem (endlichen) Volumen B

$$\frac{d}{dt}\left(W^{(\text{mechanisch})} + W^{(\text{em Feld})}\right) = -\oint_{\partial B} d\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}$$

Zeitliche Änderung der gesamten (mechan. + em) Energie = (negativen) Energiestrom durch die Oberfläche.

Beispiel (Homogene, $\perp$-stehende E- und H-Felder): ... Sei $\mathbf{E} = (E_o, 0, 0)$ and $\mathbf{H} = (0, 0, H_o)$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ E_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_o \end{vmatrix} = (0, -E_o H_o, 0) \neq 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \operatorname{div} \mathbf{S} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{\partial B} d\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = 0$$

keine Energieabstrahlung durch die Oberfläche von B.

6.5.c. Impuls des em Feldes

➢ Bilandzgleichung zur Impulserhaltung: gesucht ... analog zum obigen Energiesatz

- Impuls (in B) bzw. Impulsdichte des em Feldes (Vektorfeld)
- Impulsstrom (in B) bzw. Impulsstromdichte des em Feldes (Tensor 2. Stufe)

➢ Änderungen des mechanischen Impulses: ... aufgrund der durch das em Feld vermittelten Lorentzkraft

$$\frac{d\,\mathbf{P}^{\text{mechanisch}}}{dt} = \int_B d^3r \; \underbrace{\rho\, (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{\text{Kraftdichte}} = \int_B d^3r \; (\rho\, \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

➢ Impuls und Impulsdichte des em Feldes:

$$\mathbf{P}^{(\text{em Feld})} = \int_B d^3r \; (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \,, \qquad \mathbf{p}^{(\text{em Feld})} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \qquad \text{... Vektoren}$$

➢ Impulsbilanz der Ladungsverteilung im em Feld:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{P}^{(\text{mechanisch})} + \mathbf{P}^{(\text{em Feld})}\right) = \int_B d^3r \ (\mathbf{E}\,\text{div}\,\mathbf{D} + \mathbf{H}\,\text{div}\,\mathbf{B} + \text{rot}\,\mathbf{H}\times\mathbf{B} - \mathbf{D}\times\text{rot}\,\mathbf{E}) = \int_B d^3r\ \partial_j\, T_{ij}$$

(Definition des) Maxwellscher Spannungstensor

➢ Impulsfluß durch die Oberfläche ∂B : ... kann durch Tensor 2. Stufe dargestellt werden

➢ Maxwellscher Spannungstensor $\mathbf{T} = (T_{ij})$: ... für lineare Materialien

$$T_{ij} = T_{ji} = \epsilon_r\,\epsilon_o\,E_i\,E_j + \frac{1}{\mu_r\,\mu_o}\,B_i\,B_j - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\left(\epsilon_r\,\epsilon_o\,E^2 + \frac{1}{\mu_r\,\mu_o}\,B^2\right)$$

Impulsstromdichte des em Feldes

6.5.d. Strahlungsdruck auf Fläche

➢ Strahlungsdruck auf Flächenstück ΔA:

$$\text{Druck} = \frac{\text{Normalkomponente der Kraft}}{\text{Flaeche}} = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{P}}{\Delta A\,\Delta t} \qquad \mathbf{P}\text{ ... Impuls}$$

$$p_s = \frac{\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{P}^{(\text{em Feld})}}{\Delta A\,\Delta t} = \frac{\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{p}^{(\text{em Feld})}\,\Delta V}{\Delta A\,\Delta t}$$

$$\Delta V = \Delta A\, c\,\Delta t\,\cos\alpha$$

$$\mathbf{p}^{(\text{em Feld})} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \epsilon_o\,\mu_o\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \qquad \text{... Poynting – Vektor}$$

$$= \frac{c\,\cos\alpha}{c^2}\,\frac{\Delta A\,\Delta t}{\Delta A\,\Delta t}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{S} = \frac{\cos\alpha}{c}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{S} = \frac{\cos^2\alpha}{c}\,|\mathbf{S}| \qquad \text{... Lambert's – Kosinus – Gesetz}$$

6.5.e. Drehimpuls des em Feldes

➢ Drehimpulsdichte und Drehimpuls des em Feldes:

$$\mathbf{l}^{(\text{em Feld})} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}^{(\text{em Feld})} = \mathbf{r}\times(\mathbf{D}\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{L}^{(\text{em Feld})} = \int_B d^3r\,\mathbf{l}^{(\text{em Feld})} = \int_B d^3r\,\mathbf{r}\times(\mathbf{D}\times\mathbf{B})$$

➢ Ferner kann auch eine Drehimpulsstromdichte (= Tensor zweiter Stufe) erklrärt werden.

6.6. Aufgaben

Siehe Übungen.

7. Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

7.1. Homogene Wellengleichungen

➢ Maxwell-Gleichungen im Vakuum: $\rho \equiv 0,\ \mathbf{j} \equiv 0,\ \sigma = 0$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0\,, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0\,, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{B}}$$

➢ Homogene Wellengleichung der em Felder:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \quad - \quad \Delta}{\partial\, t^2}\right)\mathbf{E} = \Box\,\mathbf{E} = 0, \qquad \Box\,\mathbf{B} = 0$$

➢ In ungeladenen Isolatoren: $\ldots\ \sigma = 0$

$$\epsilon_r\,\epsilon_o\,\mu_r\,\mu_o\,\mathbf{E} = -\frac{n^2}{c^2}\mathbf{E} = -\frac{1}{u^2}\mathbf{E}, \qquad n^2 = \epsilon_r\,\mu_r, \qquad u = \frac{c}{n}$$

7.2. Ebene Wellen

7.2.a. Komplexe Lösungen der homogenen Wellengleichung

➢ Homogene Wellengleichung für $\psi = \{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \Phi, \mathbf{A}, ...\}$ ... allgemeine Lösung

$$\Box \, \psi(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t) + \psi_- \underbrace{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}_{\text{Phase } \phi}$$

$\psi_\pm(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$ beliebig, falls gilt $\omega = (\pm) \, c \, k$.

➢ Wellen, deren Phasenfronten in Richtung **k** laufen: $\psi_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$

➢ Komplexe (monochromatische) ebene Wellen: ... periodische (harmonische) Lösungen

$$\psi_-(\mathbf{r}, t) = A \, e^{i \, (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \qquad \psi_+(\mathbf{r}, t) = B \, e^{i \, (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)}$$

$$\psi = \text{const.} \quad \text{fuer} \quad t = t_o \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.} \qquad \text{... Gleichung einer Ebene}$$

Phasenfronten $=$ Ebenen $\perp$ Ausbreitungsrichtung

k ... Wellenvektor, Ausbreitungsvektor

ω ... (Kreis−) Frequenz der ebenen Welle

➢ Ebene Wellenfronten: Bei ebenen Wellen haben für $t = t_o$ alle Punkte $\mathbf{r}$ mit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ gerade die gleichen Werte.

7.2.b. Charakteristika ebener Wellen

➢ Wellenlänge: ... senkrechter Abstand zweier benachbarter Wellenfronten zu $t = t_o$

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t_o = \text{const.} + 2\pi\, n; \qquad \mathbf{k} \cdot \Delta\, \mathbf{r}_n = 2\pi\, n \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad (n = 1)\,.$$

➢ Periode (Schwingungsdauer): ... gleiche Phase für $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o$:

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t_o = \text{const.} + 2\pi\, n; \qquad \omega\, \Delta\, t \equiv \omega\, \tau = 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

7.2.c. Ebenes em Feld

➢ Ebene Welle: ... Ausbreitung entlang $\mathbf{k}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_o\, e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_o\, e^{i\,(\tilde{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r} - \tilde{\omega} t)}$$

➢ Maxwell-Gleichungen: ... müssen für alle Zeiten und Orte erfüllt werden

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{\partial\, \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Longleftrightarrow \quad i\,(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_o)\, e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = i\,\tilde{\omega}\,\mathbf{B}_o\, e^{i\,(\tilde{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r} - \tilde{\omega} t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \omega = \tilde{\omega}\,; \qquad \mathbf{k} = \tilde{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E}_o = \omega\, \mathbf{B}_o\,, \end{array}$$

➢ Drei anderen Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_o = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_o = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{k}\times\mathbf{B}_o = -\frac{\omega}{c^2}\mathbf{E}_o \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{k}\times\mathbf{B}_o)^2 = k^2 B_o^2 = \frac{\omega^2}{c^4}E_o^2 \quad \rightsquigarrow \quad E_o^2 = c^2 B_o^2$$

Bei ebenen Wellen stehen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ senktrecht auf $\mathbf{k}$ (transversale Wellen) und die Vektoren $\mathbf{E}_o$, $\mathbf{B}_o$, $\mathbf{k}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein orthogonales Rechtssystem.

Beispiel (Energiedichte & Stromdichte einer linear-polarisierten, ebenen Welle):

➢ Felder:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_o \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\,, \qquad \mathbf{E}_o,\ \mathbf{B}_o \text{ ... reell}$$

➢ Maxwell-Gleichungen:

$$\mathbf{k}\perp\mathbf{E}_o, \qquad \mathbf{k}\perp\mathbf{B}_o, \qquad \mathbf{E}_o\perp\mathbf{B}_o, \qquad E_o = \frac{\omega}{k}B_o = c\,B_o \qquad \rightsquigarrow \quad \mathbf{E}_o,\ \mathbf{B}_o,\ \mathbf{k} \text{ ... bilden Rechtssystem.}$$

➢ Energiedichte der Welle:

$$w(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right] = \frac{\epsilon_o}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_o}\mathbf{B}^2$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\left[\epsilon_o\,\mathbf{E}_o^2 + \frac{\mathbf{B}_o^2}{\mu_o}\right] = \frac{1}{2\mu_o}\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\left[\frac{1}{c^2}\mathbf{E}_o^2 + \mathbf{B}_o^2\right] = \frac{\mathbf{B}_o^2}{\mu_o}\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

➢ Energiestromdichte (= Poyntingvektor ⇝ Energiefluß):

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{\mu_o}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] \;=\; \frac{1}{\mu_o}\,[\mathbf{E}_o\times\mathbf{B}_o]\,\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\;-\;\omega t)\,, \qquad \mathbf{E}_o\times\mathbf{B}_o \;=\; \mathbf{E}_o\times\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_o}{\omega} \;=\; \frac{E_o^2}{\omega}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{E_o^2}{\omega\,\mu_o}\,\mathbf{k}\,\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\;-\;\omega t)\;; \qquad \mathbf{S}\parallel\mathbf{k}$$

Der Energiestrom bzw. Energiefluß erfolgt nur in $\mathbf{k}$-Richtung.

Beispiel (Ebene Transversalwellen in z-Richtung, $\mathbf{k} = k\,\mathbf{e}_z$):

$$\mathbf{E} \;=\; (E_{0x}\,\mathbf{e}_x \;+\; E_{0y}\,\mathbf{e}_y)\,e^{i\,(k\,z\,-\,\omega t)}, \qquad \mathbf{B} \;=\; \frac{1}{c}\,(-E_{0y}\,\mathbf{e}_x \;+\; E_{0x}\,\mathbf{e}_y)\,e^{i\,(k\,z\,-\,\omega t)}$$

E_{0x} und E_{0y} sind allgemein komplexe Zahlen die neben der Stärke (Intensität) auch die Polarisation des em Feldes beschreiben.

Die physikalisch-realen **E**- und **B**-Felder sind die Realteile dieser komplexwertigen Wellen (–lösungen).

Falls die elektrische Feldamplitude $\mathbf{E}_o = (E_{0x}, 0, 0)$ reell ist, dann offenbar

$$\mathbf{E} \;=\; E_{0x}\,\cos(k\,z\;-\;\omega t)\,\mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{B} \;=\; \frac{E_{0x}}{c}\,\cos(k\,z\;-\;\omega t)\,\mathbf{e}_y$$

Bei einer linear-polarisierten ebenen Welle haben die **E**- und **B**-Felder ihre Knoten und Wellenberge gleichzeitig (Knoten und Wellenberge sind in Phase).

7.2.d. Polarisation ebener Wellen

- Ebene monochromatische Welle: ... bereits durch das **E**-Feld (oder **B**-Feld) eindeutig bestimmt.
- Komplex-wertiger, elektrischer Feldstärkevektor: $\mathbf{E} = (E_{0x},\, E_{0y}, 0)$ für monochromatische Welle $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$

$$\left.\begin{aligned} E_{0x} &= |E_{0x}|\, e^{i\gamma} \\ E_{0y} &= |E_{0y}|\, e^{i(\gamma+\delta)} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{E} = \Re\left[(E_{0x}\,\mathbf{e}_x + E_{0y}\,\mathbf{e}_y)\, e^{i(kz-\omega t)}\right] = E_x\,\mathbf{e}_x + E_y\,\mathbf{e}_y$$

$$E_x = |E_{0x}|\,\cos(kz - \omega t + \gamma), \qquad E_y = |E_{0y}|\,\cos(kz - \omega t + \gamma + \underbrace{\delta}_{!!}) \quad \text{... reell}$$

- **Unterscheidung der Polarisation anhand der relativen Phase δ:**
- **Lineare Polarisation:** für $\delta = n\pi \qquad (n \in \mathbb{N})$

$$\mathbf{E} = (|E_{0x}|\,\mathbf{e}_x \pm |E_{0y}|\,\mathbf{e}_y)\,\cos(kz - \omega t + \gamma) = |\mathbf{E}|\,\mathbf{e}_\alpha\,\cos(kz - \omega t + \gamma)$$

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}, \qquad \tan\alpha = \pm\frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|} \qquad \ldots \left\{\begin{array}{lll} (+) & n = \text{gerade} \\ (-) & n = \text{ungerade} \end{array}\right.$$

$$\mathbf{e}_\alpha = \cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha\,\mathbf{e}_y$$

Winkel α bezeichnet die (Polarisation-) Richtung von **E** bzgl. der x-Achse.

- Da $\mathbf{E} = E_x\,\mathbf{e}_x + E_y\,\mathbf{e}_y$, so kann folglich auch jede beliebig polarisierte ebene Welle als Überlagerung zweier unabhängiger, linear polarisierter ebener Wellen geschrieben werden.

➢ **Zirkulare Polarisation:** für $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$

$$\mathbf{E} = E\,[\cos(k\,z - \omega t + \gamma)\,\mathbf{e}_x \mp \sin(k\,z - \omega t + \gamma)\,\mathbf{e}_y]$$

➢ Für jede Ebene $z = z_o$ [...] beschreibt zeitabhängigen Vektor, der mit Winkelgeschwindigkeit ω rotiert

- $\delta = -\frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ [cos() + sin()] ... (+) Zeichen $\Longrightarrow$ links-zirkular (mathematisch positiv)
- $\delta = +\frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ [cos() − sin()] ... (−) Zeichen $\Longrightarrow$ rechts-zirkular (Uhrzeigersinn)

(Gesamte) orts- und zeitabhängige **E**-Vektor einer links- bzw. rechtsdrehenden Schraubenlinie.

Beispiel (Komplexe sphärische Einheitsvektoren:):

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) \\ \mathbf{e}_y &= \tfrac{-i}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_{0x}\,\mathbf{e}_x + E_{0y}\,\mathbf{e}_y)\,e^{i\,(k\,z - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underbrace{(E_{0x} - iE_{0y})}_{E_-\,e^{i\alpha_-}}\,\mathbf{e}_+ + \underbrace{(E_{0x} + iE_{0y})}_{E_+\,e^{i\alpha_+}}\,\mathbf{e}_-\right]\,e^{i(kz - \omega\,t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[E_-\,e^{i(kz - \omega\,t + \alpha_-)}\,\mathbf{e}_+ + E_+\,e^{i(kz - \omega\,t + \alpha_+)}\,\mathbf{e}_-\right] \\ \Re\,\mathbf{E} &= \frac{1}{2}\,E_-\,[\cos(kz - \omega\,t + \alpha_-)\,\mathbf{e}_x - \sin(kz - \omega\,t + \alpha_-)\,\mathbf{e}_y] \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,E_+\,[\cos(kz - \omega\,t + \alpha_+)\,\mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega\,t + \alpha_+)\,\mathbf{e}_y]\ . \end{aligned}$$

Welle kann auch als Summe zweier entgegengesetzt zirkular-polarisierter Wellen geschrieben werden.

Tafelbeispiel (Energiefluß & Strahlungsdruck einer linear und zirkular-polarisierten Welle):

➢ Ebenen Welle entlang z-Achse:

$$\mathbf{E}^{\,\mathrm{lin}} = E_{0x}\,\sin(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_x + E_{0y}\,\sin(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_y = \mathbf{E}_o\,\sin(kz - \omega t) \qquad E_{0x},\ E_{0y} \quad \text{...reell}$$

$$\mathbf{E}^{\,\mathrm{circ}} = E_o\,[\cos(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_y]$$

➢ Zugehörige **B**-Felder:

$$-\dot{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$-\dot{\mathbf{B}}^{\,\mathrm{lin}} = (E_{0y}, -E_{0x}, 0)\,k\,\cos(kz - \omega t) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}^{\,\mathrm{lin}} = \frac{k}{\omega}\,(E_{0y}, -E_{0x}, 0)\,\sin(kz - \omega t) = \frac{1}{\omega}\,(\mathbf{k}\times\mathbf{E})$$

$$-\dot{\mathbf{B}}^{\,\mathrm{circ}} = -E_o\,k\,[\cos(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_x + \cos(kz - \omega t)\,\mathbf{e}_y] \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}^{\,\mathrm{circ}} = \frac{1}{\omega}\,(\mathbf{k}\times\mathbf{E})$$

➢ Poynting-Vektor:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{E}\times\mathbf{H} \;=\; \frac{1}{\mu_o}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \;=\; \frac{1}{\mu_o\,\omega}\,(\mathbf{E}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})) \;=\; \frac{1}{\mu_o\,\omega}\left(\mathbf{k}\,\mathbf{E}^2 \;-\; \mathbf{E}\,\underbrace{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})}_{=0}\right) \;=\; \frac{1}{\mu_o\,c}\,\mathbf{E}^2\,\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{S}^{\,\text{lin}} \;=\; \frac{1}{\mu_o\,c}\,E_o^2\,\sin^2(kz\;-\;\omega t)\,\mathbf{e}_z, \qquad\qquad \mathbf{S}^{\,\text{circ}} \;=\; \frac{1}{\mu_o\,c}\,E_o^2\,\mathbf{e}_z$$

➢ Strahlungsdruck auf eine um Winkel α geneigte Fläche:

$$p_s \;=\; \frac{\cos\alpha}{c}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{S} \;=\; \frac{\cos^2\alpha}{c}\,|\mathbf{S}|$$

$$p_s^{\text{lin}} \;=\; \frac{\cos^2\alpha}{\mu_o\,c^2}\,E_o^2\,\sin^2(kz\;-\;\omega t) \qquad\qquad \text{... periodisch veraenderlich}$$

$$p_s^{\text{circ}} \;=\; \frac{\cos^2\alpha}{\mu_o\,c^2}\,E_o^2 \;=\; \epsilon_o\,(\cos^2\alpha)\,E_o^2 \qquad\qquad \text{... constant}$$

7.2.e. Stehende Wellen

➢ Ebene Transversalwelle: ... in z-Richtung, $\mathbf{k}\;\|\;\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{E} \;=\; (E_{0x}\,\mathbf{e}_x \;+\; E_{0y}\,\mathbf{e}_y)\;e^{i\,(k\,z\,-\,\omega t)}$$

➢ Stehende Wellen: ... Überlagerungen zweier ebener Wellen mit gleicher Amplitude und gleicher Polarisation, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung:

$$\mathbf{E} = (E_{0x}\,\mathbf{e}_x + E_{0y}\,\mathbf{e}_y)\left[e^{i\,(k\,z-\omega t)} + e^{i\,(k\,z+\omega t)}\right] = (E_{0x}\,\mathbf{e}_x + E_{0y}\,\mathbf{e}_y)\; e^{i\,k\,z}\,\underbrace{\left[e^{-i\,\omega t} + e^{i\,\omega t}\right]}_{2\cos\omega t}$$

$$\Re\,\mathbf{E} = \left[\,|E_{0x}|\,\cos(k\,z + \gamma)\,\mathbf{e}_x + |E_{0y}|\,\cos(k\,z + \gamma + \delta)\,\mathbf{e}_y\,\right]\cdot 2\,\cos\omega t$$

➢ Nullstellen einer stehenden Welle:

$$z_n = \text{const.} + \frac{(2n+1)\pi}{2k} \qquad \text{... unabhaengig von } t$$

Spezielle stehende Wellen:

➢ **Linear polarisiert:** ... $\delta = n\pi$; Amplitude mit konstanter Feldrichtung $\mathbf{e}_\alpha$ oszilliert mit $\cos\omega t$.

➢ **Zirkular polarisiert:** ... $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$; Amplitude $|E_o| \sim \cos(kz + \gamma)$ rotiert mit $\cos\omega t$ um die z-Achse.

➢ **Elliptisch polarisiert:** ... δ beliebig und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$; Amplitude folgt einer Ellipse mit Länge der Hauptachse $\sim \cos(kz + \gamma)$ und die mit $\cos\omega t$ um die z-Achse rotiert.

7.3. Andere Transversalwellen

7.3.a. Kugelwellen

➢ Homogene Wellengleichung in Kugelkoordinaten:

$$\Box\,\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2} \;-\; \Delta\;-\right)\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2} \;-\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\,r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial\,r}\right) \;-\; \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\Omega}\right]\psi(\mathbf{r},t) \;=\; 0$$

$$\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \psi(r,t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_{\Omega}\,\psi(r,t) \;\equiv\; 0 \qquad \text{... kugelsymmetrisch}$$

➢ Setzen speziell $\psi(r,t) \;=\; \frac{\Psi(r,t)}{r}$:

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2} \;-\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\,r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial\,r}\right)\right]\frac{\Psi(r,t)}{r} \;=\; \frac{1}{r}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2} \;-\; \frac{\partial^2}{\partial\,r^2}\right)\Psi(r,t) \;=\; 0\,. \qquad \text{bzw.}$$

$$\Psi(r,t) \;=\; \Psi_+(kr\,+\,\omega t) \;+\; \Psi_-(kr\,-\,\omega t) \qquad \text{falls} \qquad k^2 \;=\; \frac{\omega^2}{c^2} \quad\Longleftrightarrow\quad \omega \;=\; c\,k \qquad (\omega\;\geq\;0)$$

➢ Bspw. für $\Psi_+(kr\,+\,\omega t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial\,r^2}\,\Psi_+(kr\,+\,\omega t) \;=\; \frac{\omega^2}{c^2}\Psi_+'' \;-\; k^2\,\Psi_+'' \;=\; \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} \;-\; k^2\right)}_{0}\,\Psi_+''(kr\,+\,\omega t) \;=\; 0\,.$$

➢ Alle Funktionen der Form $\Psi_\pm \;=\; \Psi_\pm(kr\,\pm\,\omega t)$ sind ebenfalls Lösungen der (radialen) homogenen Wellengleichung:

➢ **Kugelwellen:** ... auch periodisch in der Zeit

$$\psi_\pm(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{A_\pm}{r}\, e^{i\,(kr\,\pm\,\omega t)} \;=\; \frac{1}{r}\begin{cases} A_+\, e^{i\,(kr\,+\,\omega t)} & \text{... einlaufende Kugelwelle} \\ A_-\, e^{i\,(kr\,-\,\omega t)} & \text{... auslaufende Kugelwelle} \end{cases}$$

$$\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{r}\,\left[\Psi_+(kr\,+\,\omega t) \;+\; \Psi_-(kr\,-\,\omega t)\right]$$

➢ Phase: $\phi_\pm \;=\; kr \,\pm\, \omega t$ ... nur von $r \;=\; |\mathbf{r}|$ abhängig.

➢ Flächen konstanter Phase: $\psi \;=\; \text{const.}$ für $t \;=\; t_o$ ... Kugelflächen

➢ Amplitude einer Kugelwelle: $\frac{A_\pm}{r} \,\propto\, \frac{1}{r}$ ... nimmt mit wachsemdem Abstand r ab.

➢ Phasengeschwindigkeit:

$$kr \,\pm\, \omega t \;=\; \text{const.} \qquad \Longrightarrow \qquad r \;=\; \mp\,\frac{\omega t}{k} \,+\, \text{const.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_{\text{ph}} \;=\; \frac{dr}{dt} \;=\; \mp\,\frac{\omega}{k} \;=\; \mp\,\frac{c}{n}$$

7.3.b. Besselwellen

➢ Homogene Wellengleichung in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) :

$$\Box\,\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left(\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} \,-\, \Delta\right)\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left[\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\, t^2} \,-\, \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\,\rho}\,\rho\,\frac{\partial}{\partial\,\rho} \,-\, \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\,\varphi^2} \,-\, \frac{\partial^2}{\partial\, z^2}\right]\psi(\mathbf{r},t) \;=\; 0$$

➢ Ansatz:

$$\psi(\mathbf{r}, t) \;=\; J(\alpha\,\rho)\, e^{i\,(kz - \omega t)} \qquad \text{und} \qquad \omega^2 \;=\; (\alpha^2 \;+\; k^2)\, c^2 \qquad \text{mit} \qquad 0 \;<\; \alpha \;<\; \frac{\omega}{c}, \quad x \;=\; \alpha\,\rho$$

$$x^2\, \frac{d^2 J}{dx^2} \;+\; x\, \frac{d\,J}{dx} \;+\; \left(\frac{\omega^2 \;-\; c^2 k^2}{\alpha^2\, c^2} \right) x^2\, J \;=\; 0$$

Dispersionsfreie Bessel-Strahlen: axial-symmetrische Strahlen mit einer Strahlbreite $\sim \alpha$

7.3.c. Transversale em Wellen (TEM-Wellen)

➢ **Transversale elektrische Felder (TE-Wellen):**

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \;&=\; \mathbf{E}_1 \;+\; \mathbf{E}_2 \;=\; \mathbf{E}_o\, \left[\cos\left((\mathbf{k} + \Delta\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} \;-\; \omega t\right) \;+\; \cos\left((\mathbf{k} - \Delta\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} \;-\; \omega t\right)\right] \\ &=\; 2\,\mathbf{E}_o\, \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \;-\; \omega t)\, \cos(\Delta\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\;. \end{aligned}$$

➢ Zusätzliche Bedingungen ... um homogene Wellengleichung zu erfüllen

$$\omega \;=\; c\,|\mathbf{k} + \Delta\,\mathbf{k}| \;=\; c\,|\mathbf{k} - \Delta\,\mathbf{k}| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{k} \;\perp\; \Delta\,\mathbf{k}\,, & \mathbf{E}_o \;\perp\; \mathbf{k}\,, \\ \mathbf{E}_o \;\perp\; \Delta\,\mathbf{k}\,, & \omega \;=\; c\sqrt{\mathbf{k}^2 \;+\; (\Delta\,\mathbf{k})^2} \end{cases}$$

7.4. Wellenpakete des em Feldes

7.4.a. Überlagerung ebener Wellen

➢ Homogene Wellengleichung:

$$\Box\, \psi(\mathbf{r}, t) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_\pm(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \;\pm\; \omega t) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_\pm(k\, z \;\pm\; \omega t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z \qquad \begin{cases} \text{falls } \psi_\pm(...) \text{ hinr. oft diff'bar} \\ \omega \;=\; ck \end{cases}$$

$$v_{\,\mathrm{ph}} \;=\; \frac{dr}{dt} \;=\; \frac{\omega}{k} \;\equiv\; c \qquad\qquad (= \frac{c}{n})$$

➢ Linear Wellengleichung:

$$\psi_\pm(z, t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dk \;\; a(k) \;\; \psi_\pm(kz \;\pm\; \omega t)$$

Gewichtsfunktion bzw. Einhüllende $a(k) \;=\; a\left(\frac{\omega}{c}\right)$

➢ Diese Lösungen sind für viele Anwendungen wichtig, da es strenggenommen keine monochromatische Wellen gibt.

7.4.b. Gruppengeschwindigkeit in dispersen Medien

➢ Dielektriztätskonstante in Medien: ... allgemein auch (stark) frequenzabhängig

$$\epsilon_r \;=\; \epsilon_r(\omega) \;=\; \epsilon_r(\mathbf{r}, t;\; \mathbf{E}, \mathbf{B},\; p, T, \omega, ...) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\omega}{k} \;=\; \frac{c}{n(\omega)} \;=\; u(\omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega \;=\; \omega(k)$$

➢ Dispersion: ... Auseinanderlaufen von (ebenen) Wellen verschiedener Frequenzen bzw. Wellenzahlen <u>bzw:</u> Keine einheitliche Phasengeschwindigkeit in dipersiven Medien.

➢ Einhüllende $a(k) = a\left(\frac{\omega}{c}\right)$:

- relativ scharf um k_o konzentriert;
- $\omega(k)$ gutartig um k_o herum

$$\omega(k) = \omega(k_o) + (k - k_o)\,\frac{d\omega}{dk}|_{k_o} + \ldots = c\,k_o + (k - k_o)\,\frac{d\omega}{dk}|_{k_o} + \ldots = \omega_o + q\,v_g$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\,|_{k=k_o} \qquad \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

$$q = k - k_o \qquad \text{Wellenzahl bzw. Impulsuebertrag}$$

Gruppen- bzw. Signalgeschwindigkeit durch Einsteins Relativitätstheorie begrenzt

➢ Beispiel dispersionsfreies Medium: $\omega = ck \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \text{const.} \quad \Longleftrightarrow \quad v_g = v_{\text{ph}}$

. Gruppengeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit

➢ Überlagerung ebener Wellen:

$$\psi_\pm(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\; b(k)\; e^{i\,(kz\,\pm\,\omega t)} \approx e^{i\,(k_o\,z\,\pm\,\omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} dq\; b(k_o + q)\; e^{i\,q(z\,\pm\,v_g\,t)} = e^{i\,(k_o\,z\,\pm\,\omega t)}\, M_\pm(z \pm v_g\,t)$$

Modulationsfunktionen ... laufen mit v_g

➢ **Charakterisierung eines Wellenpaktes:** ... zwei Ausbreitungsgeschwindigkeiten

- Phasengeschwindigkeit:

$$u = \frac{\omega(k)}{k} \qquad = c\ \ldots \quad \text{im Vakuum}$$

- Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$$

➢ Spezielle Relativitätstheorie: ... fordert $v_g \lesssim c$, jedoch nicht $u \leq c$.

➢ Dispersion: falls $v_g \neq u$; Modulationsfunktion $M_\pm(z \pm v_g\, t)$ als Taylorentwicklung dargestellbar

7.4.c. Gaußsche Wellenpakete

➢ (Normierte) Gaußverteilung: ... Gewichtsfunktion $b(k)$

$$b(k) = \frac{2}{\Delta\, k_o \sqrt{\pi}} \exp\left(- \frac{4(k - k_o)^2}{(\Delta\, k_o)^2}\right) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} b(k) = 1 \qquad \text{Normierung}$$

➢ Maximum bei $k = k_o$: $b_{\max} = \frac{2}{\Delta\, k_o \sqrt{\pi}}$

➢ Punkte $k_o \pm \Delta k$: ... wo $b(k) \sim \frac{1}{e}$ abgeklungen

➢ Grenzdarstellung für $\delta-$Funktion: $\delta(k - k_o) = \lim_{\Delta\, k \to 0} b(k)$.

7.4.d. Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

➢ Fourierreihen: Sei $f(x)$ im Intervall $[-a, a]$ quadrat-integrierbar, d.h. $\int_{-a}^{a} dx\, |f(x)|^2 \;=\;$ exist., dann

$$f(x) \;=\; f_o \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \, \cos\left(\frac{n\pi}{a}\, x\right) \;+\; b_n \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}\, x\right) \right]$$

$$f_o \;=\; \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} dx\; f(x) \;=\; \bar{f}\,; \qquad\qquad \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} dx\; f(x) \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \left(\frac{n\pi}{a}\, x\right)$$

Falls $f(x + 2a) \;=\; f(x)$ periodisch, dann gilt obige Fourierreihe für alle x.

➢ Fouriertransformation: Verallgemeinerung der Fourierreihe für quadratisch-integrierbare Funktionen im gesamten Raum $(-\infty,\, \infty)$ liefert für

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\; \tilde{f}(k)\; e^{i\,kx} \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \tilde{f}(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; f(x)\; e^{-i\,kx}$$

$\tilde{f}(k)$ heißt auch Fouriertransformierte oder Spektralfunktion von $f(x)$

➢ Die Fouriertransformierte erfüllt zahlreiche Beziehungen und Eigenschaften; siehe Übungen.

➢ Fouriertransformierte mit 'konvergenzerzeugendem Faktor':

$$\tilde{f}(k) \;=\; \lim_{\eta \to +0} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; f(x)\; e^{-i\,kx\,-\,\eta x^2}$$

erweitert die Klasse der transformierbaren Funktionen, ohne die Transformation für die (ohnehin schon) quadratisch-integrierbaren Funktionen zu beeinflussen.

7.4.e. Allgemeine Lösung der Wellengleichung für gegebene Anfangswerte

➢ Homogene Wellengleichung: ... mit Anfangsbedingung

$$\Box\, \psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \;-\; \Delta\right) \psi \;=\; 0, \qquad\qquad \psi(\mathbf{r},t=0) \;=\; \psi_o(\mathbf{r})\,; \qquad \dot{\psi}(\mathbf{r},t=0) \;=\; \nu_o(\mathbf{r})$$

➢ Fouriertransformierte $\tilde{\psi}(\mathbf{k},\omega)$: ... noch zu bestimmen

$$\Box\, \psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \;-\; \Delta\right) \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \tilde{\psi}(\mathbf{k},\omega)\; e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\;-\;\omega t)}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\; \underbrace{\left(-\,\frac{\omega^2}{c^2} \;+\; \mathbf{k}^2\right) \tilde{\psi}(\mathbf{k},\omega)}_{=\,0}\; e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\;-\;\omega t)} \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{\omega^2}{c^2} \;-\; \mathbf{k}^2\right) \tilde{\psi}(\mathbf{k},\omega) \;=\; 0$$

rein algebraische Gleichung mit nichttrivialen Lösungen für $\omega \;=\; \pm ck$

➢ Allgemeine Lösung:

$$\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3r' \left[\dot{D}(\mathbf{r}\;-\;\mathbf{r}',t)\;\psi_o(\mathbf{r}') \;+\; D(\mathbf{r}\;-\;\mathbf{r}',t)\;\nu_o(\mathbf{r}')\right] \qquad\qquad \psi_o(\mathbf{r}),\;\nu_o(\mathbf{r}) \qquad \text{... Anfangswerte}$$

$$D(\mathbf{r},t) \;=\; -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{ck}\; e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(e^{i\,ck\,t} \;-\; e^{-i\,ck\,t}\right)$$

7.4.f. Energietransport in Wellenfeldern

➢ Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit: ... gesucht sei Zeitmittel $\bar{g}(t) \; = \; \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt' \, g(t')$

$$\mathbf{v} \; = \; \mathbf{v}_o(\mathbf{r}) \, e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{w} \; = \; \mathbf{w}_o(\mathbf{r}) \, e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{v}_o, \; \mathbf{w}_o \; \text{... allgemein komplexwertig}$$

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}(t) \; = \; \frac{1}{\tau} \, \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{w}_o \int_t^{t+\tau} dt' \, e^{-2\,i\omega t'} \; = \; i \, \frac{\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{w}_o}{2\,\omega\,\tau} \, e^{-2\,i\omega t'} \Big|_t^{t+\tau} \; = \; 0$$

für charakteristische Periode $\tau \; = \; 2\pi/\omega$

➢ Ähnlich gilt:

$$\overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{w}}(t) \; = \; \mathbf{v}_o^* \cdot \mathbf{w}_o, \qquad \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^*}(t) \; = \; \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{w}_o^*$$

$$\overline{(\Re\,\mathbf{v}) \cdot (\Re\,\mathbf{w})}(t) \; = \; \frac{1}{2} \, \Re \left(\mathbf{v}_o^* \cdot \mathbf{w}_o \right)(t) \; = \; \frac{1}{2} \, \Re \left(\mathbf{v}_o \cdot \mathbf{w}_o^* \right)$$

$$\overline{(\Re\,\mathbf{v}) \times (\Re\,\mathbf{w})}(t) \; = \; \frac{1}{2} \, \Re \left(\mathbf{v}_o^* \times \mathbf{w}_o \right)(t) \; = \; \frac{1}{2} \, \Re \left(\mathbf{v}_o \times \mathbf{w}_o^* \right)$$

➢ Für em Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit gilt folglich für das Zeitmittel der

- Energiedichte: $\overline{w}(\mathbf{r}, t) \; = \; \frac{1}{4} \, \Re \left(\mathbf{H}_o \cdot \mathbf{B}_o^* \; + \; \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{D}_o^* \right)$

- Energiestromdichte: $\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \; = \; \frac{1}{2} \, \Re \left(\mathbf{E}_o \times \mathbf{H}_o^* \right)$

Beispiel (Energiedichte & Stromdichte einer ebener Welle):

$$\mathbf{E} \;=\; \mathbf{E}_o\, e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\,-\,\omega t)}, \qquad\qquad \mathbf{B} \;=\; \mathbf{B}_o\, e^{i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\,-\,\omega t)}$$

$$\overline{w}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{2}\,\epsilon_r\,\epsilon_o\,|\mathbf{E}_o|^2 \;=\; \frac{1}{2\,\mu_r\,\mu_o}\,|\mathbf{B}_o|^2, \qquad\qquad \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\epsilon_r\,\epsilon_o}{\mu_r\,\mu_o}\,|\mathbf{E}_o|^2\,\frac{\mathbf{k}}{k}$$

7.5. Wellenausbreitung in homogenen elektrischen Leitern

Voraussetzung: Betrachten homogene und isotrope Leiter ohne Überschußladungen bzw. Stromfluß

$$\rho \;=\; 0\,; \qquad \mathbf{j} \;=\; \sigma\,\mathbf{E}\,; \qquad \sigma \;\neq\; 0 \qquad \text{... Leitfaehigkeit}$$

7.5.a. Maxwell-Gleichungen in homogenen elektrischen Leitern

➢ Maxwell für homogene und isotrope Leiter:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} \;=\; 0\,, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} \;=\; -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} \;=\; 0\,, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} \;=\; \frac{1}{u^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \;+\; \mu_r\,\mu_o\,\mathbf{j}\,.$$

gekoppelte homogene, lineare pDgl.

➢ Die Maxwell-Gleichungen sind auch in (homogenen und ladungsfreien) elektrischen Leitern offenbar ebenfalls homogene Gleichungen ersten Grades in $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, die sich noch immer exakt entkoppeln lassen.

➢ Leiter ohne freie Ladungsträger:

$$\rho(\mathbf{r}, t=0) \;=\; 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \rho(\mathbf{r}, t) \;?? \qquad \ldots \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} \;=\; \frac{1}{u^2}\,\dot{\mathbf{E}} \;+\; \mu_r\,\mu_o\,\sigma\,\mathbf{E}\,, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} \;=\; \frac{\rho}{\epsilon_r\,\epsilon_o}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \;=\; \rho(\mathbf{r}, t=0)\; e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_r\,\epsilon_o}\,t} \qquad \underbrace{\Longrightarrow}_{\rho(\mathbf{r},t=0)=0} \qquad 0$$

D.h. ein homogener und anfänglich ladungsfreier Leiter bleibt für alle Zeiten ladungsfrei; dies ist intuitiv auch klar, da $\mathbf{j} \;=\; \sigma\,\mathbf{E}$ einen homogenen und stationären Strom beschreibt.

7.5.b. Telegrafengleichung

➢ Feldgleichungen:

$$\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\;\mathbf{E} \;=\; \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{E}) \;-\; \Delta\,\mathbf{E} \;=\; -\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{B}} \;=\; -\,\mu_r\,\mu_o\,\sigma\,\dot{\mathbf{E}} \;-\; \frac{1}{u^2}\,\ddot{\mathbf{E}}$$

$$\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\;\mathbf{B} \;=\; \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{B}) \;-\; \Delta\,\mathbf{B} \;=\; \mu_r\,\mu_o\,\sigma\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \;+\; \frac{1}{u^2}\,\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}} \;=\; -\,\mu_r\,\mu_o\,\sigma\,\dot{\mathbf{B}} \;-\; \frac{1}{u^2}\,\ddot{\mathbf{B}}$$

➢ Homogene Wellengleichung für ladungsfreie Leiter ($\sigma \;\neq\; 0$)

$$\left[\left(\frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} \;-\; \Delta\right) \;+\; \mu_r\,\mu_o\,\sigma\,\frac{\partial}{\partial t}\right]\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \;=\; 0$$

Telegrafengleichung ... und analog für $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

➢ Zeitlich harmonisches Wellenfeld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\Delta \;+\; \frac{\omega^2}{u^2} \;+\; i\,\omega\,\mu_r\,\mu_o\,\sigma\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 0$$

➢ Komplexwertige Eigenschaften: des Mediums

- komplexe (relative) Dielektrizitätskonstante: $\bar{\epsilon}_r \;=\; \epsilon_r \;+\; i\,\epsilon_i \;=\; \epsilon_r \;+\; i\,\frac{\sigma}{\epsilon_o\,\omega}$
- komplexe Wellengeschwindigkeit: $\bar{u} \;=\; \frac{c}{\bar{n}} \;=\; \frac{c}{\sqrt{\mu_r\,\bar{\epsilon}_r}}$
- komplexer Brechungsindex: $\bar{n} \;=\; \sqrt{\mu_r\,\bar{\epsilon}_r} \;=\; n_r \;+\; i\kappa$

➢ Homogene Wellengleichung ... mit zeitlich harmonischer Lösung

$$= \;...$$

$$\left(\Delta \;+\; \frac{\omega^2}{\bar{u}^2}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathbf{E}_o\; e^{i\,(\bar{\mathbf{k}}\cdot r - \omega t)} \qquad \text{falls} \qquad \bar{\mathbf{k}} \;=\; \frac{\omega}{\bar{u}}\,\mathbf{e}_k \;=\; \bar{k}\,\mathbf{e}_k$$

$\mathbf{e}_k$ ...... Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung

➢ Komplexwertiger Brechungsindex $\bar{n}$: ... da $\bar{u}$ komplex $\rightarrow \bar{\mathbf{k}}$ und $\bar{k}$ komplex

$$\bar{n} \;=\; \sqrt{\bar{\epsilon}_r\,\mu_r} \;=\; n_r \;+\; i\,\kappa \qquad\qquad n_r,\ \kappa\ \text{... reell}$$

$$\bar{n}^2 \;=\; \bar{\epsilon}_r\,\mu_r \;=\; n_r^2 \;-\; \kappa^2 \;+\; 2i\,\kappa\,n_r \qquad\qquad \bar{\epsilon}_r \;=\; \epsilon_r \;+\; i\,\frac{\sigma}{\epsilon_o\,\omega}$$

$$\left(\epsilon_r \;+\; i\,\frac{\sigma}{\epsilon_o\,\omega}\right)\mu_r \;=\; \underbrace{n^2}_{=\,\epsilon_r\,\mu_r} \;+\, i\,\frac{\sigma\,\mu_r}{\epsilon_o\,\omega} \;=\; n_r^2 \;-\; \kappa^2 \;+\; 2i\,\kappa\,n_r$$

➢ Zwei Gleichungen für $n_r,\ \kappa$:

$$n^2 \;=\; n_r^2 \,-\, \kappa^2\,, \qquad\qquad \frac{\sigma\,\mu_r}{\epsilon_o\,\omega} \;=\; 2\,\kappa\,n_r$$

$$n_r^2 \;=\; \frac{n^2}{2}\left[1 \,+\, \sqrt{1 \,+\, \left(\frac{\sigma}{\epsilon_r\,\epsilon_o\,\omega}\right)^2}\,\right] \;\underbrace{\longrightarrow}_{\sigma\to 0}\; n \qquad n_r \text{ ... verallgemeinerter Brechungsindex}$$

$$\kappa^2 \;=\; \frac{n^2}{2}\left[-1 \,+\, \sqrt{1 \,+\, \left(\frac{\sigma}{\epsilon_r\,\epsilon_o\,\omega}\right)^2}\,\right] \;\underbrace{\longrightarrow}_{\sigma\to 0}\; 0 \qquad \kappa \text{ ... (sogenannter) Extinktionskoeffizient}$$

➢ Extinktionskoeffizient κ: ... Dämpfung in realen Leitern aufgrund des endlichen Widerstandes $(\sigma \,<\, \infty)$

7.6. Erzeugung und Abstrahlung von Wellen

7.6.a. Inhomogene Wellengleichungen (in Lorenz-Eichung)

➢ Lorenz-Eichung: $\quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} \,+\, \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \;=\; 0$

➢ Homogene Medien:

$$\Box \;=\; \left(\frac{1}{u^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} \;-\; \Delta\right), \qquad u \;=\; \frac{c}{n(\omega)} \;=\; \frac{1}{\epsilon_r\,\epsilon_o\,\mu_r\,\mu_o} \;\longrightarrow\; c \qquad \text{(Vakuum)}$$

$$\epsilon \;\equiv\; \epsilon_r\,\epsilon_o \;\longrightarrow\; \epsilon_o\,, \qquad \mu \;\equiv\; \mu_r\,\mu_o \;\longrightarrow\; \mu_o \qquad \text{(Vakuum)}$$

$$\Box\,\Phi \;=\; \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon}\,, \qquad \Box\,\mathbf{A} \;=\; \mu\,\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$$

(entkoppelte) inhomogene Wellengleichung in Lorenz-Eichung

➢ Gesucht: allgemeine Lösungen für zeitabhängige $\rho(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$

$$\Box\,\psi(\mathbf{r},t) \;=\; -\,\sigma(\mathbf{r},t)$$

➢ **Lösungen mittels Greenschen Funktionen:** ... Fouriertransformation, Einsetzen und Integration im Komplexen:

$$\Box_{\mathbf{r},t}\,G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \;=\; -\,\delta(\mathbf{r}\;-\;\mathbf{r})\;\delta(t\;-\;t'), \qquad \psi(\mathbf{r},t) \;=\; \int d^3r' \int dt'\;G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\;\sigma(\mathbf{r}',t')$$

$$G_o^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \;=\; \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\;\delta\left(t' \;-\; t \;+\; \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u}\right) \;=\; \frac{\delta(t'\;-\;t_r)}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad t_r \;=\; t \;-\; \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u}$$

$$G_o^{\mathrm{adv}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \;=\; \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\;\delta\left(t' \;-\; t \;-\; \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u}\right) \;=\; \frac{\delta(t'\;-\;t_a)}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad t_a \;=\; t \;+\; \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u}$$

Lösungen/Greensfunktion erfüllen zudem die Lorenz-Bedingung

➢ Nur die retardierte Lösung erfüllt das Kausalitätsprinzip, da in der avancierten Lösung eine Störung zu einer zukünftigen Zeit $t' > t$ die Potenziale und Felder zur Zeit t bestimmen.

7.6.b. Vektorpotenzial harmonisch oszillierender Quellen

➢ Abstrahlung em Felder: ... mittels harmonisch oszillierende Quellen; z.B. Radio- und Mikrowellen oder Licht

$$\rho(\mathbf{r}, t) \;=\; \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t}, \qquad\qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t}$$

$\rho(\mathbf{r})$ and $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ sind hierbei allgemein komplex

➢ Retardierten Zeit ... $t_r \;=\; t \,-\, \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{u}$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r) \;=\; \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, e^{-i\,\omega t}\, e^{-i\,\left(\frac{\omega}{u}\right)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \;=\; \mathbf{A}(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t} \;=\; e^{-i\,\omega t}\, \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 r'\, \frac{e^{-i\,k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \qquad k \;=\; \frac{\omega}{u}$$

7.6.c. Näherungen zu zeitabhängigen Potenzialen und Feldern. Klassifizierung der Feldzonen

➢ **Abstrahlung von Wellen:** ... von ruhenden Ladungen und Stromverteilungen

- Wellenlänge λ
- am Aufpunkt $\mathbf{r}$ mit $r \;=\; |\mathbf{r}|$
- von einer lokalisierten Ladungs- und Stromdichte innerhalb eines (kleinen und gegebenen) Raumgebietes mit Radius $R \gtrsim r'$ d.h. $[\rho\,(r > R) \;=\; 0,\; \mathbf{j}\,(r > R) \;=\; 0]$.

➢ **Unterscheidung verschiedener Feldzonen:**

- Nahzone (gewöhnlich ohne Retardierung): $r' \lesssim R \ll r \ll \lambda$ ... weit innerhalb einer Wellenlänge
- Intermediäre Zone: $r' \lesssim R \ll r \sim \lambda$ ... innerhalb einer oder weniger λ
- Fernzohne bzw. Strahlungszone: $r' \lesssim R \ll \lambda \ll r$ ... fern der Strahlungsquelle

7.6.d. Elektromagnetische Potenziale bewegter Punktladungen. Greens-Funktionen

➢ Punktladung q: .... bewegt sich entlang der Bahnkurve $\mathbf{R}(t)$ und mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$; dann

Ladungsdichte: $\rho(\mathbf{r}, t) = q\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$

Stromdichte: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\,\mathbf{v}(t)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$

➢ Lösung mittels retardierter Greenschen Funktion:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\,\epsilon_o\,\epsilon_r} \int d^3r' \int dt' \, \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}\right)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi} \int d^3r' \int dt' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{u}\right)$$

➢ Integration über t':

$$\Phi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{q}{4\pi\,\epsilon_r\,\epsilon_o}\;\frac{1}{(|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t_r)| \;-\; \frac{1}{u}(\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t_r))\cdot\mathbf{v}(t_r))}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{\mu_r\,\mu_o\,q}{4\pi}\;\frac{\mathbf{v}(t_r)}{(|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t_r)| \;-\; \frac{1}{u}(\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t_r))\cdot\mathbf{v}(t_r))}$$

(em) Lienard-Wiechert Potenzial eines beliebig bewegten Teilchens

➢ Potenziale sind für komplizierte Teilchenbahnen nicht einfach zu berechnen.

Beispiel (Lienard-Wiechert Potenzial einer ruhenden Punktladung):

$$\mathbf{v}(t) \;\equiv\; 0\,, \qquad \mathbf{R}(t) \;=\; \mathbf{R}_o \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{q}{4\pi\,\epsilon_r\,\epsilon_o\,|\mathbf{r}-\mathbf{R}_o|}\,, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; 0$$

bekannte Potenziale der ES

Beispiel (Lienard-Wiechert Potenzial einer gleichförmig bewegten Punktladung): $\mathbf{v}(t) \;\equiv\; \mathbf{v}_o \;=\; \text{const.}$

Korrekte retardierte Zeit t_r ... auch vom Winkel $\alpha \;=\; \angle(\mathbf{n}_r,\mathbf{v}_o)$ abhängig

$$t \;-\; t_r \;=\; \frac{\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t_r)}{u^2 \;-\; v_o^2}\left(v_o\,\cos\alpha \;+\; \sqrt{u^2 \;-\; v_o^2\sin^2\alpha}\right) \qquad \alpha \;=\; \angle(\mathbf{n}_r,\mathbf{v}_o) \qquad \mathbf{n}_r \;=\; \frac{\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t_r)}{|\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t_r)|}$$

$$\Phi(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{q}{4\pi\,\epsilon_r\,\epsilon_o\,|\mathbf{r}-\mathbf{R}(t)|}\;\frac{1}{\sqrt{1 \;-\; \frac{v_o^2}{u^2}\,\sin^2\alpha}}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \;=\; \frac{\mathbf{v_o}}{u^2}\,\Phi(\mathbf{r},t)$$

Felder:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; -\mathrm{grad}\,\Phi \;-\; \frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; \mathrm{rot}\;\mathbf{A}$$

Energiedichte und Energiestromdichte

7.6.e. Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen

➢ Abstrahlung em Wellen: ... nichtverschwindender Energiefluß auch ducrh ∞-fernen Oberflächen

$$\lim_{R\to\infty} \int d\mathbf{a}\cdot\mathbf{S} \;\neq\; 0$$

Strahlungsfeld ... im Gegensatz zu stationären Feldern

➢ d.h. **E**- und **B**-Felder ... dürfen nicht stärker als mit $1/R$ abfallen, da Oberfläche $\sim\; 1/R^2$.

➢ Bezeichnungen:

$$\mathbf{n}_r(t) \;=\; \frac{\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t)}{|\mathbf{r} \;-\; \mathbf{R}(t)|}$$

... Einheitsvektor von der Ladung zum Aufpunkt zur Zeit t

$$\kappa(t) \;=\; 1 \;-\; \frac{\mathbf{v}(t)}{c}\cdot\mathbf{n}_r(t)$$

... Mass fuer den charakteristischen Winkel zwischen Geschwindigkeit des Teilchen zum Zeitpunkt t und Verbindungslinie zumAufpunkt $\mathbf{r}$

$$\mathbf{b}(t) \;=\; \frac{d\,\mathbf{v}(t)}{dt}$$

... Beschleunigung des Teilchens

➢ Energiestromdichte (Poynting-Vektor) im Fernfeld:

$$\mathbf{S}(t) \;=\; \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_r\mu_o} \;=\; \frac{\mathbf{E}\times(\mathbf{n}_r\times\mathbf{E})}{\mu_r\mu_o\,c} \;=\; \frac{\mathbf{n}_r}{\mu_r\mu_o\,c}\,\mathbf{E}^2 \;=\; \frac{q\,\mathbf{n}_r(t)}{16\pi^2\,\epsilon_o\,c^3\,\kappa^6\,R^2}\,\left(\mathbf{n}_r\times\left[\left(\mathbf{n}_r \;-\; \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{b}\right]\right)^2$$

Poynting-Vektor im Fernfeld

➢ d.h. nur beschleunigte Ladungen mit $\mathbf{b} = \frac{d\,\mathbf{v}(t)}{dt} \neq 0$ strahlen em Energie ab, während eine geradlinig und gleichförmig bewegte Punktladung ($\mathbf{b} = 0$) nicht strahlt.

➢ Bremsstrahlung: ... Streuung schneller Elektronen im Coulombfeld von (schweren) Targetkernen $\rightsquigarrow$ kontinuierliches Röntgenspektrum

7.7. Multipolstrahlung oszillierender Strom- und Ladungsquellen

7.7.a. Langwellennäherung

➢ Quellen und Potenziale: ... mit harmonischer Zeitentwicklung

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \Phi &= \Phi(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}(\mathbf{r})\, e^{-i\,\omega t}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\,\epsilon_r\,\epsilon_o} \int d^3r'\, \frac{\rho(\mathbf{r}')\, e^{i\,k\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi} \int d^3r'\, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, e^{i\,k\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

$$\operatorname{grad} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\,\Phi}{\partial t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{c}{i\,\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}$$

Diskussion von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ asureichend !

➢ **Langwellennäherung:** ... Kugel mit Radius $R \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$, die Ladungs- und Stromverteilung umschließt.

➢ **Vektorpotenzial im Fernfeld:** $\frac{e^{i\,k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{i\,kr}}{r}\, e^{-\,i\,k\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\,kr}}{r} \underbrace{\left[\frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi} \int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, e^{i\,k\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')}\right]}_{\text{unabhaengig von Betrag von r}}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{e^{i\,(kr\,-\,\omega t)}}{r}\,[...]$$

Energieflußdichte $\sim \frac{1}{r^2}$

Beispiel (Strahlung von Atomen und Kernen:):

- Optische Übergangsstrahlung: $R \sim 1\ \text{Å} = 10^{-10}\,m \ll \lambda = 500\,nm = 5\cdot 10^{-7}\,m$ ... gut erfüllt.
- Atomare Röntgenstrahlung: $R \sim 1\ \text{Å} \lesssim 5\ \text{Å}$ ... Langwellennäherung nur beschränkt nutzbar.
- γ-Strahlung von Kernen: $R \sim 10^{-15}\,m \ll \lambda = 0.01\ \text{Å} = 10^{-12}\,m$ ... gut erfüllt.

7.7.b. Elektrische Dipolstrahlung

➢ Vektorpotenzial in der Fernzone: für $R \ll r,\, \lambda$ und Terme $\sim r'^2$ vernachlässigt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \underbrace{\frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\,\frac{e^{i\,kr}}{r}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')}_{\text{elektr. Dipolstrahlung}} + \underbrace{\frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\frac{e^{i\,kr}}{4\pi}\int d^3r'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')}_{\text{magnetische Dipol− und elektr. Quadrupolstrahlung}} = \mathbf{A}^{(\mathrm{E1})}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}^{(\mathrm{M1+E2})}(\mathbf{r})$$

Entwicklung des Vektorpotenzials in Multipolfelder $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

➢ Elektrisches Dipolmoment $\mathbf{p}$:

$$\mathrm{div}\,(x_k\,\mathbf{j}) \;=\; j_k \;+\; x_k\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}, \qquad\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{j} \;+\; \frac{\partial\,\rho}{\partial t} \;=\; \mathrm{div}\,\mathbf{j} \;-\; i\,\omega\,\rho \;=\; 0$$

$$A_k^{(\mathrm{E1})}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\,\frac{e^{i\,kr}}{r}\int d^3r'\,j_k \;=\; \frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\,\frac{e^{i\,kr}}{r}\int d^3r'\,\left[\mathrm{div}\,(x_k\,\mathbf{j}) \;-\; x_k\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\,\frac{e^{i\,kr}}{r}\int d^3\mathbf{a}'\cdot(x_k\,\mathbf{j})}_{=\,0,\ \text{da lokalisiert}} \;-\; \frac{-i\,\omega\,\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\,\frac{e^{i\,kr}}{r}\;\underbrace{\int d^3r'\,x_k\,\rho}_{p_k\ \text{... elektr. Dipolmoment}}$$

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{E1})} \;=\; -i\,\omega\,\frac{\mu_r\,\mu_o}{4\pi}\,\frac{e^{i\,kr}}{r}\,\mathbf{p} \qquad\qquad \text{eletrisches Dipolmoment}$$

(Elektrische) Dipolstrahlung kurzgefaßt:

➢ **Zeitlich variierender (Hertzscher) Dipol $\mathbf{p}$:**

- strahlt nicht in Richtung von $\mathbf{p}$ $(\vartheta \;=\; 0)$; ... sondern
- strahlt vor allem senkrecht zu $\mathbf{p}$ $(\vartheta \;=\; 90^o)$.
- Dipolstrahlung hat charakteristische $\sin^2\vartheta$ -Abhängigkeit.

➢ $\mathbf{E}^{(\mathrm{E1})}$, $\mathbf{B}^{(\mathrm{E1})}$ und $\mathbf{S}^{(\mathrm{E1})}$ ... orthogonales Dreibein.

➢ Oszillierender Dipol mit Frequenz ω : ... setzt die Beschleunigung einer Punktladung voraus

➢ Es gibt keine Monopolstrahlung $(L \;=\; 0)$, d.h. keine E0 oder M0-Strahlung.

➢ Elektrische Dipolstrahlung E1 ($L = 1$): ... niedrigste Multipolarität des Vektorpotenzials $\mathbf{A} \sim \frac{1}{r^L}$.

➢ Quantenmechanik: ... Zusammenhang zwischen Multipolarität der Strahlung und Drehimpulses der Photonen.

7.7.c. Magnetische Dipolstrahlung

➢ Vektorpotenzial im Fernfeld $\sim 1/r$:

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{M1+E2})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_r \, \mu_o}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - i\frac{\omega}{c} \right) \frac{e^{i\,kr}}{r} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')$$

$$= \ldots = \ldots (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \, \mathbf{j} = \underbrace{\frac{1}{2} \, (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})}_{\rightsquigarrow \, \mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \underbrace{\frac{1}{2} \, \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \, \mathbf{r}' + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \, \mathbf{j} \}}_{\rightsquigarrow \text{ elektrische Quadrupolstrahlung}} \qquad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad \ldots \begin{cases} \text{magnetisches} \\ \text{Dipolmoment} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{M1})}(\mathbf{r}) = - \, i\omega \, \frac{\mu_r \, \mu_o}{4\pi \, c} \, \frac{e^{i\,kr}}{r} \, (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{A}^{(\mathrm{E1})}(\mathbf{r}) = - \, i\omega \, \frac{\mu_r \, \mu_o}{4\pi \, c} \, \frac{e^{i\,kr}}{r} \, \mathbf{p}$$

➢ Analogie von $\mathbf{A}^{(\mathrm{M1})}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}^{(\mathrm{E1})}(\mathbf{r})$: ... $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Felder abgelesen

$$\mathbf{B}^{(\mathrm{M1})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_r \, \mu_o}{4\pi \, c^2} \, \omega^2 \, \frac{e^{i\,kr}}{r} \, (\mathbf{n} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{n})) \qquad \mathbf{E}^{(\mathrm{M1})} \perp \mathbf{E}^{(\mathrm{E1})}, \, \mathbf{B}^{(\mathrm{M1})}$$

$$\mathbf{E}^{(\mathrm{M1})}(\mathbf{r}) = c \, (\mathbf{B}^{(\mathrm{M1})} \times \mathbf{n}) \qquad \mathbf{B}^{(\mathrm{M1})} \perp \mathbf{B}^{(\mathrm{E1})}$$

$$\left\langle \mathbf{S}^{(\mathrm{M1})}(\mathbf{r}) \right\rangle_t = \frac{\mu_r \, \mu_o}{16\pi^2 \, c^3} \, \omega^4 \, m^2 \, \frac{\sin^2 \vartheta}{2r^2} \, \mathbf{n} \sim \frac{1}{c} \left\langle \mathbf{S}^{(\mathrm{E1})}(\mathbf{r}) \right\rangle_t \qquad \vartheta = \angle \, (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \qquad |\mathbf{S}^{(\mathrm{M1})}|_t = \frac{1}{c} \, |\mathbf{S}^{(\mathrm{E1})}|_t$$

Abstrahlcharakteristik eines magnetischen Dipolfeldes (zeitliches Mittel)

➢ Elektrische und magnetische Dipolstrahlung:

- E1 und M1 haben die gleiche Frequenz- und Winkelabhängigkeit aber verschiedene Polarisation
- elektrischer Dipol: Polarisation liegt in der $(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ -Ebene
- magnetischer Dipol: Polarisation steht senkrecht auf $(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ -Ebene

7.7.d. Elektrische Quadrupolstrahlung

➢ Verbleibenden Terme des Fernfeldes von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$: ... elektrischer Quadrupol (symmetrischer Quadrupoltensor)

$$\mathbf{A}^{(\mathrm{M1+E2})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_r \mu_o}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - i\frac{\omega}{c} \right) \frac{e^{i\,kr}}{r} \int d^3r' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')$$

➢ Mittlere Energiestromdichte des elektrischen Quadrupols:

$$\mathbf{S}^{(\mathrm{E2})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_r \mu_o}{16\pi^2 c^3} \omega^6 \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{36\, r^2} \left(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{Q}} \right)^2 \mathbf{n} \qquad \tilde{\mathbf{Q}}_i = \sum_k Q_{ik}\, \mathbf{e}_k \qquad \ldots \begin{cases} \text{Zeilenvektor des} \\ \text{Quadrupoltensors} \end{cases}$$

$$\left\langle \mathbf{S}^{(\mathrm{E2})}(\mathbf{r}) \right\rangle_t = \frac{\mu_r \mu_o}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72\, r^2} \left(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{Q}} \right)^2 \mathbf{n}$$

Abstrahlcharakteristik eines elektrischen Quadrupolfeldes (zeitliches Mittel)

7.8. Aufgaben

Siehe Übungen.