Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

14. Januar 2019
Wintersemester

# Probeklausur

**Aufgabe 1:** Verständnisfragen (2+2+2+3 Punkte)

**a)** Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung? Erklären Sie die Bedeutung aller auftretenden Symbole.

**b)** Wie ist ein hermitescher Operator definiert? Erläutern Sie die Bedeutung hermitescher Operatoren für die Quantenmechanik.

**c)** Berechnen Sie die folgende Kommutatoren: $[\hat{x}, \hat{p}_x]$, $\left[\hat{V}(x), \hat{p}_x\right]$, $\left[\hat{p}_x^2, \hat{p}_x\right]$.

**d)** Leiten Sie aus der Schrödingergleichung für ein Teilchen im ortsabhängigen Potential eine Kontinuitätsgleichung ab und erläutern Sie deren Bedeutung.

**Aufgabe 2:** Teilchen im Potentialtopf (3+5+2 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ befinde sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf, dessen Wände bei $x = 0$ und $x = L$ liegen. Das zugehörige Potential ist

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Zur Zeit $t = t_0$ werde das Teilchen durch die auf eins normierte Wellenfunktion

$$\phi_0(x) \;=\; \frac{10}{\sqrt{5L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{12}{\sqrt{5L}} \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

beschrieben.

**a)** Lösen Sie die Schrödingergleichung für das obige Potential für die Wellenfunktionen und Energieeigenwerte.

**b)** Welche Ergebnisse können bei einer Messung der Energie des Teilchens im Zustand $\phi_0(x)$ auftreten? Wie groß sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten?

**c)** Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\phi(x,t)$ des Teilchens für $t > t_0$.

**Aufgabe 3:** Harmonischer Oszillator (4+2+2 Punkte)

Ein Teilchen der Masse $m$ werde zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die (normierte) Wellenfunktion

$$\phi(x,0) \;=\; \phi_0(x) \;=\; C\left[2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - 1\right)^2 - 3\right] \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \text{mit} \quad C \;=\; \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

beschrieben. Für $t \geq 0$ befinde sich das Teilchen im Potential eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\omega$.

**a)** Bestimmen Sie die Zeitentwicklung $\phi(x,t)$ des Teilchens für $t \geq 0$.

**b)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ bei einer Energiemessung im $n$-ten Energieniveau anzutreffen.

**c)** Berechnen Sie den Erwartungswert einer Energiemessung zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$.

### Aufgabe 4: Wasserstoffatom (1+2+1+3 Punkte)

Ein Elektron im Wasserstoffatom befinde sich im Zustand

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\psi_{100} + \psi_{211} + \psi_{21-1}),$$

wobei die Wellenfunktionen $\psi_{nlm}$ durch die Quantenzahlen $n$, $l$ und $m$ gekennzeichnet sind.

**a)** Berechnen sie den Erwartungswert von $\hat{L}_z$ in diesem Zustand.

**b)** Berechnen Sie die Wahrschneinlichkeit dafür, dass eine Energiemessung den Wert $-0.25$ Ry liefert (1 Ry = 13,6 eV).

**c)** Welche anderen Ergebnisse könnte diese Messung liefern?

**d)** Betrachten Sie nun ein Heliumatom, dessen Elektronen durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_1 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{\hbar^2}{2m}\triangle_2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

beschrieben werden. Welche Bedeutung hat der letzte Term von $\hat{H}$? Berechnen Sie die Grundzustandsenergie des Heliumatoms für den Fall, dass der letzte Term vernachlässigt wird.

### Aufgabe 5: Hantelmolekül (3+4+1 Punkte)

Ein starres Hantelmolekül rotiere im Raum um den Koordinatenursprung. Es werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2J}\hat{\mathbf{L}}^2$$

beschrieben.

**a)** Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenfunktionen und Entartungsgrade.

**b)** Zu einem Zeitpunkt $t_0$ befinde sich das Molekül in dem Zustand

$$\psi(\vartheta,\varphi) = \alpha\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos 2\varphi\right)$$

mit einer reellen Normierungskonstante $\alpha$. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten liefert eine Messung von $\hat{\mathbf{L}}^2$ die Werte 0, $2\hbar^2$ und $6\hbar^2$?

**c)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine gleichzeitige Messung von $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$?

**Hinweise:**

Nützliche Identitäten:

$$\int_0^a dx\,\sin^2(x) \;=\; \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\sin(2a)$$
$$\sin^3(x) \;=\; \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{00} \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$
$$Y_{10} \;=\; \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \quad Y_{1,\pm1} \;=\; \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi},$$
$$Y_{20} \;=\; \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right), \quad Y_{2,\pm1} \;=\; \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \quad Y_{2,\pm2} \;=\; \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,\mathrm{e}^{\pm 2i\varphi}$$

Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators:

$$\psi_n(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$H_0(x) \;=\; 1, \quad H_1(x) \;=\; 2x, \quad H_2(x) \;=\; 4x^2 - 2, \quad H_3(x) \;=\; 8x^3 - 12x.$$