Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

7. Januar 2018
Wintersemester

Übungsserie 11

Aufgabe 1: Drehimpuls (1+3+2+1+1+1+1 Punkte)
Betrachten Sie ein spinloses Teilchen, das durch

$$\psi = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r}$$

gegeben ist. Hierbei sind $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und K sowie α reelle Konstanten.

a) Drücken Sie die Wellenfunktion in Kugelkoordinaten aus.

b) Separieren Sie die Wellenfunktion in Radialteil $\psi_1(r)$ und Winkelanteil $\psi_2(\theta, \phi)$, sodass $\psi = \psi_1(r)\psi_2(\theta, \phi)$. Drücken Sie den Winkeanlteil mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \qquad Y_{2\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}.$$

aus. Was bedeutet es, dass die Kugelflächenfunktionen orthornormal sind?

c) Normieren Sie (selbst natürlich) sowohl $\psi_1(r)$ als auch $\psi_2(\theta, \phi)$.

d) Berechnen Sie die Eigenwerte der Drehimpulsoperatoren $\mathbf{L}^2$ und L_z für die Kugelflächenfunktionen Y_{lm}.

e) Berechnen Sie den Gesamtdrehimpuls des Teilchens.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert der $z-$Komponente des Drehimpulses.

g) Berechnen Sie die Wahrschenlichkeit durch eine Messung $L_z = +\hbar$ zu finden.

Aufgabe 2: Kommutatoren von Drehimpulsoperatoren I (1+1+1+1+1 Punkte)
Berechnen Sie folgende Kommutatoren.

a) $[L_x, L_y], [L_y, L_z], [L_z, L_x]$

b) $\left[\mathbf{L}^2, L_x\right], \left[\mathbf{L}^2, L_y\right], \left[\mathbf{L}^2, L_z\right]$

c) $\left[L_x, \mathbf{r}^2\right]$

d) $\left[L_y, \mathbf{p}^2\right]$

e) $[L_z, p_x], [L_z, x]$

Aufgabe 3: Kommutatoren von Drehimpulsoperatoren II (2 Punkte)
Sei A ein Operator, der mit L_x und L_y vertauscht. Zeigen Sie, dass A dann auch mit L_z kommutiert.