Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

14. Januar 2019
Wintersemester

Übungsserie 12

Aufgabe 1: Wasserstoff-Erwartungswerte (3+2+2 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion eines Elektrons im Wasserstoffatom gegeben durch

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{12}} \left[2\psi_{100} - \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1} + \sqrt{2}\psi_{321} \right],$$

wobei ψ_{nlm} die Eigenzustände von $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ mit bekannten Quantenzahlen n, l, m des Wasserstoffatoms sind.

a) Geben Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{H} \rangle, \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle$ und $\langle \hat{L}_z \rangle$ der Energie (in Einheiten der Grundzustandsenergie E_1), des Drehimpulsquadrates sowie der z-Komponente des Drehimpulses für diesen Zustand an.

b) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Wellenfunktion für $t > 0$.

c) Wie groß ist die Wahrschenlichkeit, zu einem Zeitpunkt $t > 0$ für $\hat{\mathbf{L}}^2$ den Wert $2\hbar^2$ und gleichzeitig für $\hat{L}_z$ den Wert $\hbar$ zu messen?

Aufgabe 2: Wasserstoffatom (4+2+2+5 Punkte)

Ein Elektron im Wasserstoffatom befinde sich im Eigenzustand

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) \;=\; A \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin\vartheta e^{i\varphi}$$

mit den Quantenzahlen n, l, m und der Normierungskonstante A.

a) Leiten Sie aus der allgemeinen Form der Wasserstoffeigenfunktionen die Hauptquantenzahl n für diesen Zustand ab. Bestimmen Sie mit Hilfe der expliziten Form der Drehimpulsoperatoren $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ die Quantenzahlen l and m.

b) Wie lautet der Energieeigenwert des Zustandes? Berechnen Sie dessen Entartungsgrad.

c) Normieren Sie die Wellenfunktion $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert von r sowie die Radialkoordinate $r_{\max}$ maximaler Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons. Vergleichen Sie beide Werte und interpretieren Sie sie hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung.

Aufgabe 3: Rydberg-Zustände (3+3 Punkte)

Die Wellenfunktionen eines Elektrons im Wasserstoffatom sind gegeben durch

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \phi) \;=\; \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-\frac{r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) Y_{lm}(\vartheta, \phi).$$

Betrachten Sie ein Elektron in einem Zustand, der den maximal möglichen Bahndrehimpuls besitzt (d.h. $l = n - 1$).

a) Zeigen Sie, dass für diese Zustände gilt:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= a_0 n \left(n + \frac{1}{2} \right), \\ \langle r^2 \rangle &= a_0^2 n^2 (n+1) \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass sich die Resultate aus a) für große Werte von n (und damit l) folgendermaßen verhalten:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle r^2 \rangle} &\to a_0 n^2, \\ \frac{\sigma_r}{\langle r \rangle} &\to 0, \end{aligned}$$

wobei σ_r die wie üblich definierte Standardabweichung ist. Diese Zustände sehr großer Hauptquantenzahl n heißen Rydberg-Zustände.