Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

15. Oktober 2018
Wintersemester

Übungsserie 1

Aufgabe 1: Welle-Teilchen-Dualismus (4 Punkte)
Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge eines Elektrons im Wasserstoffatom auf der energetisch niedrigsten Bohrschen-Bahn sowie die eines Fußballs (Durchmesser $0,3$ m, Masse $0,5$ kg), der mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h auf das gegnerische Tor zufliegt. Warum kann man den Wellencharakter des Fussballs vernachlässigen und daher mit der Newtonschen Theorie rechnen, jedoch bei Elektronen im Wasserstoffatom nicht?

Aufgabe 2: Ebene Wellen am Doppelspalt (3 Punkte)
Eine ebene Welle kann durch die nachfolgende Gleichung:

$$A(\mathbf{r},t) = a\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

beschrieben werden. Eine solche Welle laufe gegen die Vorderseite einer Wand, in der zwei Spalte eingelassen sind. Auf der Rückseite tritt an jedem Spalt eine Kugelwelle der Form:

$$A_j(\mathbf{r},t) = b\frac{\mathrm{e}^{i(kr_j-\omega t)}}{r_j}$$

aus. Hierbei ist b eine Konstante und r_j der Abstand vom jeweiligen (punktförmig angenommenen) Spalt. Die Spalte sind durch $j \in \{1,2\}$ gekennzeichnet. Die resultierende Welle hinter der Rückseite an der Wand ergibt sich als Superposition der elementaren Kugelwellen, $A_{res} = A_1 + A_2$. Berechnen Sie die Intensität $I = |A_{res}|^2$ des Wellenfeldes $A(\mathbf{r},t)$ an jedem beliebigen Punkt im Raum nach der Wand. Skizzieren Sie eine exemplarische Interferenzerscheinung, die auf einem Schirm, der hinter der Wand und parallel zu dieser aufgestellt ist, zu sehen ist.

Aufgabe 3: Gaußsche Integrale (2+2 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale von Hand:

$$\textbf{a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{c}{2}x^2} \qquad\qquad \textbf{b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\frac{c}{2}x^2+jx}$$

mit $c > 0$ und $j \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Symmetrische Matrizen und ihre Eigenwerte (2+2 Punkte)
Betrachten Sie zweidimensionale komplexe Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ und dazugehörige 2×2- Matrizen $\hat{A}$,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit $v_1, v_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{C}$.

(a) Durch $\hat{A}$ wird einem Vektor $\mathbf{v}$ ein neuer Vektor $\mathbf{w}$ zugeordnet:

$$\mathbf{w} = \hat{A}\mathbf{v} : \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{matrix}.$$

(b) Das Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ im $\mathbb{C}^2$ wird gemäß

$$\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle = v_1^* w_1 + v_2^* w_2$$

definiert (hierbei bedeute * komplexe Konjugaiton).

(c) Die adjungierte Matrix $\hat{A}^\dagger$ wird definiert durch die Forderung

$$\left\langle \hat{A}^\dagger \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \right\rangle \stackrel{!}{=} \left\langle \mathbf{v} \mid \hat{A}\mathbf{w} \right\rangle \qquad \text{für alle } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^2.$$

(d) Hermitesche Matrizen $\hat{A}$ erfüllen $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

(e) Die komplexe Zahl λ heißt Eigenwert von $\hat{A}$ mit dem zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{v}$ falls gilt:

$$\hat{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Lösen Sie für eine allgemeine komplexe 2×2-Matrix $\hat{A}$ die folgenden Aufgaben:
a) Welche Bedingungen müssen die Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ erfüllen, damit die Matrix $\hat{A}$ hermitesch ist?
b) Berechnen Sie für den Fall einer hermiteschen Matrix $\hat{A}$ die zugehörigen Eigenwerte. Können diese komplex sein?