Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

22. Oktober 2018
Wintersemester

Übungsserie 2

Aufgabe 1: Eigenwerte besonderer Matrizen (1+1+1+1 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix immer reell sind.

b) Zeigen Sie, dass der Betrag der Eigenwerte einer unitären Matrix gleich 1 ist.

c) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer hermiteschen Matrix zueinander orthogonal sind.

d) Zeigen Sie dass für eine hermitesche Matrix $\hat{A}$ und jeden Vektor $\mathbf{v} \in D(\hat{A})$ gilt:

$$\left\langle \mathbf{v} \mid \hat{A}\mathbf{v} \right\rangle \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: Differentialoperatoren (5 Punkte)

Finden Sie zu den Eigenfunktionen (1)-(5) die zugehörigen Operatoren (a)-(e). Was sind die zugehörigen Eigenwerte?

	Operatoren		Eigenfunktionen
(a)	$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}$	(1)	$\sin(-2x)+\cos(2x)$
(b)	$\frac{d^2}{dx^2}$	(2)	$4x^4 - 12x^2 + 3$
(c)	$\frac{d^4}{dx^4}$	(3)	$4x^3 - 3x$
(d)	$\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$	(4)	$x^2 - 4x + 2$
(e)	$x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx}$	(5)	$e^{8x} + e^{-8x}$

Aufgabe 3: Differentialoperator und Funktionensystem (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) f(x) \;=\; 0,$$

wobei k zunächst eine unbestimmte Konstante ist.

a) Bestimmen Sie die Lösungen $f_k(x)$ der obigen Differentialgleichung auf dem Intervall $(0, L)$ mit den Randbedingungen $f(0) = f(L) = 0$. Welche Werte kann k dann annehmen?

b) Normieren Sie die erhaltenen Lösungen, so dass gilt

$$\int_0^L dx\; f_k^*(x) f_k(x) \;=\; 1.$$

c) Zeigen Sie, dass die zu verschiedenen Werten von k gehörenden Lösungen orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 4: Freies Teilchen (4+2+3+(4) Punkte)

Gegeben sei die folgende Wellenfunktion eines freien Teilchens mit Masse m in einer Dimension:

$$\Psi(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}a(t)}}\exp\left(ik_0x - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t - \frac{\left(x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{2aa(t)}\right)$$

mit

$$a(t) \;=\; a\left(1 + \frac{1}{a^2}\frac{i\hbar t}{m}\right).$$

Dabei sind a und k_0 Konstanten.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = \Psi^*\Psi$ und erläutern Sie die zeitliche Abhängigkeit.

b) Zeigen Sie explizit, dass die Norm zeitunabhängig ist.

c) **(Bonus)** Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\Psi(p,t)$ im Impulsraum (Fouriertransformierte).

d) **(Bonus)** Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x} = \langle\Psi|x|\Psi\rangle$ sowie die Varianz $(\Delta x)^2 = \langle\Psi|(x-\bar{x})^2|\Psi\rangle$. Interpretieren Sie beide Größen physikalisch.