Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

29. Oktober 2018
Wintersemester

Übungsserie 3

Aufgabe 1: Photonenwelle (3 Punkte)

Betrachten Sie eine Photonenwelle mit Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k, die entlang der x Richtung propagiert. Wie kann man die Welle beschreiben? Wenden Sie den Impulsoperator zur Ableitung des Impulseigenwertes dieser Welle an und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2: Kommutatoren (3+3 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Kommutators für Operatoren A und B:

1. $\left[A, BC\right] = \left[A, B\right]C + B\left[A, C\right]$
2. $\left[A, \left[B, C\right]\right] + \left[B, \left[C, A\right]\right] + \left[C, \left[A, B\right]\right] = 0$
3. Sei $\left[B, \left[A, B\right]\right] = 0$, zeigen Sie $\left[A, B^n\right] = nB^{n-1}\left[A, B\right]$

Hinweis: c) Induktion

b) Berechnen Sie explizit folgende Kombinationen von Orts und Impulsoperatoren:

1. $\left[\hat{x}_i, \hat{p_i}^2\right]$
2. $\left[\hat{x}_i^2, \hat{p_i}^2\right]$
3. $\left[\hat{x}_i\hat{p}_i, \hat{p_i}^2\right]$

Aufgabe 3: Zeitunabhängige Größen (2+4 Punkte)

Sei $\Psi(t)$ der zeitabhängige Zustandsvektor, der sich als Lösung der Schrödingergleichung (mit zeitunabhängigem Hamiltonoperator $\hat{H}$) ergibt.

a) Zeigen Sie unter Verwendung von

$$\frac{d\Psi}{dt} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Psi(t+\epsilon) - \Psi(t)}{\epsilon},$$

dass für zeitunabhängige selbstadjungierte Operatoren $\hat{A}$ folgendes gilt:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle = \left\langle \frac{d\Psi}{dt} \mid \hat{A}\Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \mid \hat{A}\frac{d\Psi}{dt} \right\rangle.$$

b) Der zeitunabhängige selbstadjungierte Operator $\hat{A}$ kommutiere mit $\hat{H}$, d.h. $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle = 0.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis für die Fälle $\hat{A} = \hat{I}$ (Identitätsoperator) und $\hat{A} = \hat{H}$.

Aufgabe 4: Wo ist das Pion? (3+(2) Punkte)

Betrachten Sie ein Pion (oder π-Meson) das durch die folgene Wellenfunktion beschrieben wird:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1 + ix}{1 - ix^2}.$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte des Pions. An welcher Stelle x ist die Wahrscheinlichkeit, das Pion zu treffen, am höchsten?

b) (Bonus) Berechnen Sie explizit den Normierungsfaktor N.