Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

5. November 2018
Wintersemester

Übungsserie 4

Aufgabe 1: Pauli-Matrizen und Elektronenspin (1+1+1+1 Punkte)

Betrachten Sie die Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$, die durch

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

a) Sind Pauli-Matrizen hermitesch? Was bedeutet das physikalisch?

b) Die Pauli-Matrizen stellen die Operatoren für die Spinkomponenten von Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen dar. Können wir alle drei Komponenten des Elektronenspins mit gleicher Präzision messen?

c) Können wir $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, $\hat{\sigma}_z^2$ mit gleicher Präzision messen?

d) Betrachten Sie ein Elektron mit Impuls p und Ort x. Können wir p und x gleichzeitig mit beliebiger Präzision messen?

Aufgabe 2: Teilchen auf einem Ring (3+3+2+2+(4) Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im Potential (alle Einheiten sind in SI)

$$V(\varphi) = \begin{cases} 1, & r = R \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei r und φ Polarkoordinaten sind.

a) Stellen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf und finden Sie passende Randbedingungen für die Wellenfunktion.

b) Bestimmen Sie die normierten Wellenfunktionen sowie die Energieeigenwerte des Teilchens.

c) Zeigen Sie, dass die in b) gefundenen Eigenfunktionen des Hamiltonoperators auch Eigenfunktionen des Operators $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ sind und finden Sie die entsprechenden Eigenwerte l.

d) Interpretieren Sie $\hat{L}_z$ physikalisch, indem Sie einen Zusammenhang mit der klassischen Mechanik herstellen.

e) **(Bonus)** Betrachten Sie nun das Teilchen im Potential

$$V(\varphi) = \begin{cases} 1, & r = R, 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wie ändern sich die Randbedingungen, möglichen Wellenfunktionen und Energieeigenwerte des Teilchens im Vergleich zum vorherigen Teil der Aufgabe? Gibt es Zustände, in denen die Wellenfunktion eine Eigenfunktion von $\hat{L}_z$ ist?

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsdichten (3+2 Punkte)

Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines geladenen Teilchens (Ladung q) in einem (reellen) elektromagnetischen Feld, das durch das raum- und zeitabhängige Vektorpotential (A_x, A_y, A_z) und durch das skalare Potential Φ beschrieben wird, lautet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x - q\hat{A}_x\right)^2 + \left(\hat{p}_y - q\hat{A}_y\right)^2 + \left(\hat{p}_z - q\hat{A}_z\right)^2\right] + q\hat{\Phi}.$$

Hierin sind $\hat{A}_x = A_x(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t)$ (analog $\hat{A}_y, \hat{A}_z$) und $\hat{\Phi}_x = \Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t)$.

a) Finden Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte und leiten Sie die entsprechende Kontinuitätsgleichung ab.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort eines Teilchens und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte invariant unter der Eichtransformation

$$\hat{A} \to \hat{A}' = \hat{A} + \nabla\Lambda \qquad \Psi \to \Psi' = \mathrm{e}^{\frac{iq\Lambda}{\hbar}}\Psi$$

ist. Hierbei ist $\Lambda(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, t)$ ein reelles, skalares Potential.