Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

12. November 2018
Wintersemester

Übungsserie 5

Aufgabe 1: Stationärer Zustand (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator ist ein Energieoperator. Das heißt, dass dieser für ein freies Teilchen durch die Energie-Impuls Beziehung gegeben ist. Der Hamiltonoperator eines Teilchens das in einem Potential $V(\mathbf{r})$ ist, ist durch

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

gegeben. Betrachten Sie die Myon Wellenfunktion

$$\psi(r,t) \;=\; N\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2a^2} - i\frac{\hbar}{2ma^2}t} \quad \text{mit} \quad a^2 = \frac{\hbar}{m\omega},$$

wobei $a, N \in \mathbb{R}$ und $r = |\mathbf{r}|$ sind. Bestimmen Sie das Potential, in dem sich das Myon befindet.

Aufgabe 2: Erwartungswerte (5+1 Punkte)

Der Erwartungswert eines Operators $\hat{A}$ in einem Zustand $\phi(x)$ ist

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \left\langle \phi \,\middle|\, \hat{A}\phi \right\rangle \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte

1. $\langle \hat{x}\hat{p}_x \rangle$
2. $\langle \hat{p}_x\hat{x} \rangle$
3. $\langle (\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})/2 \rangle$

für ein Teilchen, das mit der Wellenfunktion

$$\psi(x) \;=\; \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a}) & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

beschrieben wird. Benutzen Sie trigonometrische Identitäten, um die Integrale (von Hand) zu lösen.

b) Die Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ sind hermitesch. Sind $\hat{x}\hat{p}_x$, $\hat{p}_x\hat{x}$ und $(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})/2$ ebenso hermitesch?

Aufgabe 3: Korrespondenzprinzip (2+3 Punkte)

In Serie 3 Aufgabe 3 haben Sie gezeigt, dass für den Erwartungswert eines zeitunabhängigen Operators $\hat{A}$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle [\hat{A}, \hat{H}] \right\rangle$$

gilt.

a) Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Erwartungswerte für $\hat{A} = \hat{x}$ und $\hat{A} = \hat{p}$, wobei der eindimensionale Hamiltonoperator durch $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ gegeben ist.

b) Betrachten Sie nun ein klassisches Teilchen der Masse m in einem ortsabhängigem Potential $V(x)$. Berechnen Sie die klassischen Bewegungsgleichungen aus der Hamiltonfunktion und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus Aufgabe **a**. Diskutieren Sie hierbei kurz Gemeinsamkeiten und Unterschiede.