Prof. Stephan Fritzsche
TPI and HI Jena
— Quantenmechanik I —

20. November 2017
Wintersemester

# Übungsserie 6

**Aufgabe 1:** Halbunendlicher Potentialtopf (2+2+2+2+2 Punkte)

Betrachten Sie ein Positron der Masse $m$ und Energie $E < V_0$ in einem halbunendlichem Potential. Das Potential habe die Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq L \\ V_0, & x > L \end{cases} .$$

**a)** Skizzieren Sie das Potential. Notieren Sie die stationäre Schrödingergleichung in allen drei räumlichen Bereichen sowie alle Grenzbedingungen, die die Wellenfunktion erfüllen muss.

**b)** Lösen Sie die Schrödingergleichung für alle $x$ und schreiben Sie mit Hilfe der Bedingungen die Wellenfunktion. Drücken Sie die Wellenfunktion mit nur einer Normierungskonstante aus.

**c)** Finden Sie diese Normierungskonstante.

**d)** Handelt es sich um ein diskretes oder ein kontinuierliches Energiespektrum? Begründen Sie ihre Antwort.

**e)** Skizzieren Sie die zwei Wellenfunktionen mit den niedrigsten möglichen Energien.

**Aufgabe 2:** Endlicher Potentialtopf (1+2+4+3+2+1)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $m$ in einem endlichen eindimensionalen Potentialtopf, der durch das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a \leq x \leq a \\ V_0 & |x| > a \end{cases}$$

gegeben ist und nur einen gebundenen Zustand besitzt.

**a)** Zeigen Sie zunächst, dass in diesem Fall der Potentialtopf der Bedingung

$$V_0 a^2 < \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m}$$

genügen muss.

**b)** Zeigen Sie, dass die Grundzustandsenergie durch

$$E = \frac{\hbar^2}{4ma^2} \left( \sqrt{1 + \frac{8m}{\hbar^2} V_0 a^2} - 1 \right)$$

approximiert werden kann.
Hinweis: für kleine $x$ gilt $x\tan(x) = x^2 + O(x^4)$

**c)** Berechnen Sie je einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit das Teilchen innerhalb bzw. außerhalb des Potentialtopfes zu finden. Der Normierungsfaktor muss hier nicht explizit bestimmt werden. Stellen Sie jedoch sicher, dass die Stetigkeitsbedingung am Rand des Topfes erfüllt ist. Drücken Sie beide Ergebnisse nur in Abhängigkeit von $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $a$ und dem Normierungsfaktor $N$ aus.

**d)** Führen Sie die Variable $\xi = ka$ ein. Berechnen Sie, welche Werte $\xi$ annehmen darf, damit die Wahrscheinlichkeit das Teilchen außerhalb des Topfes anzutreffen größer ist als die Wahrscheinlichkeit das Teilchen innerhalb des Topfes zu finden.
Hinweis: Taylorapproximation zweiter Ordnung

**e)** Verwenden Sie den approximativen Energieeigenwert aus Aufgabe **b** und zeigen Sie, dass der Potentialtopf die Bedingung

$$V_0 a^2 < \frac{\hbar^2}{2m}(\xi_0^2 + 1)\xi_0^2$$

erfüllen muss, damit die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Teilchen im Potentialtopf kleiner ist als außerhalb des Potentialtopfes. Hierbei ist $\xi_0$ der maximale erlaubte Wert für $\xi$ aus Aufgabe **d**.

**f)** Seit der Entdeckung des Transistors sind diese Bauteile um mehr als 9 Größenordnungen geschrumpft. Die kleinsten Transistoren sind heutzutage etwa 10 nm groß. Begründen Sie quantenmechanisch weshalb diese Entwicklung nicht beliebig fortgesetzt werden kann.